一橋大学数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**一橋大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解を持つ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術を以て計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，一橋大学に通用する力となりましょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「一橋大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，一橋大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時、私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜一橋大学数学ⅠAⅡB　目次＞

第１講　方程式・不等式・関数
第２講　図形と方程式
第３講　微分法・積分法①
第４講　微分法・積分法②
第５講　ベクトル
第６講　数列
第７講　場合の数・確率
第８講　整数問題
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に一橋大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん, このまま続ければ(おそらく) 最後の答えに行き着く！　というところまで行っている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていますか

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ら，先生はすべてを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありませんよ。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。自分で感じたことも含め，テキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題や Point Pickup を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述して行きましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかしながら，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題等とのバランスをみながら，着々と進めて行きましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません。答えに行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答えにたどり着く！　とおっしゃられる方もおりますが,「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」がまったく考慮されておらず,「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強，特に受験が近づいてきている時期に求められるのは,「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする。以下に挙げるのはそんな本です。また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます。良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう。

【入試突破のための基礎固め】

・「１対１対応の演習」（東京出版）

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます。Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃの全６冊です。教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に代えるための本です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　（東京出版）

入試の典型問題を網羅したものです。分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です。「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です。

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意。

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　（河合塾 SERIES）

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています。ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・一橋大学　赤本　（教学社）

有名な過去問題集です。第一志望が決定したら購入しておきましょう。傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　方程式・不等式・関数

1　a，b を整数とする．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α，β，γ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のうちどれかは整数である．a，b を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　平面上の定点 A$(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ を通る負の傾きの直線と，x 軸，y 軸がつくる直角三角形について，次の問いに答えよ．

(1)　この三角形の面積の最小値を求めよ．

(2)　この三角形の直角をはさむ 2 辺の長さの和の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a, b, c を 3 辺とする三角形がある．この三角形の面積を二等分する線分の長さの最小値は $\sqrt{2(s-a)(s-b)}$ となることを証明せよ．
ただし，$a \geqq b \geqq c$, $a+b+c=2s$ とする．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

1　２点 P，Q は，放物線 $y=x^2$ 上を ∠POQ が直角であるように動く．ただし，O は原点である．

(1)　線分 PQ は定点を通ることを示せ．

(2)　線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a, b, c は 0 以上の実数とする．3 点 A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, C$(1,\ c)$ は，$\angle \mathrm{ABC}=30^\circ$，$\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$ を満たす．

(1)　c を求めよ．

(2)　AB の長さの最大値と最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　x，y は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ とするとき，$\dfrac{2x-y+1}{x-y+3}$ の最大値と最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法・積分法①

|1| 点 $(x,\ y)$ が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ．

(1)　$x+y$

(2)　x^4+y^4

(3)　x^3+y^3

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　曲線 $y=ax^3-ax$ $(a\neq 0)$ 上に異なる 2 点 P，Q があり，P における接線と Q における接線がともに直線 PQ と直交している．このような P，Q が存在するための a の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 $f(x)=x^3-x^2-x-1$, $g(x)=x^2-x-1$ とする．

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ．また，$1<\alpha<2$ であることを示せ．

(2) 方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする．α と β の大小を比較せよ．

(3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法②

1　平面上に放物線 $y=x^2-5x+6$ と直線 $y=kax-a^2-5a$ がある．

(1)　すべての実数 a に対して放物線と直線が異なる２点で交わるような定数 k の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた範囲にあって，放物線と直線で囲まれる部分の面積が a によらず一定になるような定数 k を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=x^2$ 上の点 A$(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 B$(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1)　2 直線 l，m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2)　点 C が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a を定数とし，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=x^2-3 \qquad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が2つの共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする．C_a の面積を a で表せ．

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも1つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ベクトル

1　三角形 ABC において，

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$

である．辺 AC 上の点 D は BD⊥AC を満たし，辺 AB 上の点 E は CE⊥AB をみたす．CE と BD の交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　［1］　平面上の 3 点 O, A, B は条件 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=1$ を満たす．

(1)　$|\overrightarrow{AB}|$ および三角形 OAB の面積を求めよ．

(2)　点 P が平面上を $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OB}|$ を満たしながら動くときの三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．

［2］　a, c を実数とする．空間内の 4 点 O$(0, 0, 0)$, A$(2, 0, a)$, B$(2, 1, 5)$, C$(0, 1, c)$ は同一平面上にある．

(1)　c を a で表せ．

(2)　四角形 OABC の面積の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 四面体 OAPQ において，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である．

(1) $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとり得る範囲を求めよ．

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1 ［1］ 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ があって，$c_n=a_n+b_n$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）とおくとき $c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=17$ である．数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を n の式で表せ．ただし，$\{b_n\}$ の初項，公比はともに整数で，公比は 0 でないとする．

［2］ 数列 a_1，a_2，a_3，…… を次のように定める．

$$a_1=1,\ a_2=a_3=2,\ a_4=a_5=a_6=3,\ \cdots\cdots$$

(1) 与えられた自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ．

(2) m を自然数とするとき，この数列の初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 正の整数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 x_n, y_n を定める．

(1) x_{n+1}，y_{n+1} を x_n，y_n で表せ．

(2) n が偶数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=1$，n が奇数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=-1$ であることを証明せよ．

(3) 任意の n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ に近い近似値であることを証明せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　［1］ (1) 2以上の整数 n に対し $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$ を求めよ.

(2) 任意の正の整数 n に対し $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$ が成り立つことを示せ.

［2］ 数列 a_1, a_2, a_3, …… が $a_1=a_2=1$, $a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ ($r=1$, 2, 3, ……) を満たすとき, a_{4n} ($n=1$, 2, 3, ……) は3の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ.

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

1　1 個のさいころを繰り返し投げ，出た目を順にかけて積を作っていく．

(1)　n 回さいころを投げたときはじめて積が 12 になる確率 p_n を求めよ．

(2)　n 回さいころを投げたとき積が 12 である確率 q_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　n 個の袋の中にそれぞれ赤球が 1 個，白球が 9 個入っている．これらの n 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出したとき，赤球が奇数個取り出される確率を p_n とする．

(1)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2)　p_n を求めよ．

[2]　箱 A，箱 B のそれぞれに赤球が 1 個，白球が 3 個，合計 4 個ずつ入っている．1 回の試行で箱 A の球 1 個と箱 B の球 1 個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤球が 1 個，白球が 3 個入っている確率 p_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n 枚のカードがあり，1 枚目のカードに 1，2 枚目のカードに 2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻すことを 3 回行う．取り出されたカードに書かれている数を取り出された順に x, y, z とする．

(1)　$x>y$ となる確率 p を求めよ．

(2)　$2x=y+z$ となる確率 q を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　整数問題

1　[1]　連続している 2 個以上の正の整数がある．これらの整数の和を S として次の問いに答えよ．

(1)　$S=64$ とはなりえないことを示せ．

(2)　$S=200$ となるとき，連続している整数のうち最小，最大のものをそれぞれ求めよ．

[2]　p，q は素数で $p<q$ とする．

(1)　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ．

(2)　$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限ることを示せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　すべての正の整数 n に対して 5^n+an+b が16の倍数となるような16以下の正の整数 a, b を求めよ.

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 x は 0 でない実数とする.

(1) $x+\dfrac{1}{x}$ が整数ならばすべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ.

(2) $x-\dfrac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば $x^2-\dfrac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ.

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　$2 \leqq a < b \leqq M$ を満たすすべての整数 a，b について不等式

$$3(a^2+b^2) < 2(a+b)^2$$

が成り立つような正の整数 M のうち最大のものを求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面の x 軸上に定点 A(1, 0), B(−1, 0), y 軸上に定点 C(0, 1), D(0, −1) がある．この平面上の動点 P から線分 AB 上の点までの距離の最大値を M(P), 最小値を m(P) とする．条件

(ア)　$M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ または $M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$

(イ)　$m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ かつ $m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$

をともに満たす点 P の存在範囲を K とする．ただし，PC, PD は線分の長さを表す．

(1)　K を図示せよ．

(2)　2 直線 $x=1$, $x=-1$ の間にある K の部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　空間内に同一平面上にない4点A，B，C，Dがある．B，Dから直線ACに下ろした垂線の足をそれぞれH，Kとし，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{KD}}$のなす角を$\theta$（$0<\theta<\pi$）とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$のなす角を$\alpha$とすると$\mathrm{HD}\cos\alpha=\mathrm{KD}\cos\theta$であることを証明せよ．

(2)　$\angle\mathrm{ABC}$，$\angle\mathrm{ADC}$がともに直角で，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=b$であるとき，線分BDの長さを$a$，$b$，$\theta$で表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題(2)

1 (1) 1 から n までの自然数の総和が偶数になるのは n がどのような数の場合か.

(2) 1 から n までの自然数の総和が偶数であるとき，1 から n までの自然数を 2 つの組に分けてそれぞれの組に属する数の総和が等しくなるようにできることを証明せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n 枚のカードがあり，1 枚目のカードに 1，2 枚目のカードに 2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し，もう一度無作為に 1 枚を取り出す．取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x，y とする．また，k を n の約数とする．

(1)　$x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ．

(2)　さらに，$k=pq$ とする．ただし，p，q は異なる素数である．xy が k の倍数となる確率を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n を正の整数とする．

(1)　$x^2+y<n^2$ を満たす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 a_n を求めよ．

(2)　$\sqrt{x^2+y}$ を超えない最大の整数が n であるような正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 b_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　面積が1である△OABの辺OA上に点M，辺OB上に点Nをとり，線分ANと線分BMの交点をPとして△PMNの面積について考える．△OMNの面積が$\frac{1}{3}$のとき，$s=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}$として，以下の問いに答えよ．

(1)　△PMNの面積を求めよ．

(2)　△OMNの面積が$\frac{1}{3}$という条件を満たしながら，M，Nが動くとき，△PMNの面積が最大になるときのsの値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標平面の x 軸上に点 A(15, 0) があり，y 軸上の $y>0$ の部分に点 B がある．原点 O と直線 AB との距離，および線分 OB の長さはともに整数である．点 B の座標を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　原点を中心とする半径１の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする．A$(a,\ 0)$ と N$(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく．また，B$(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく．

(1)　P の座標を a で表せ．

(2)　AQ∥PB のとき，AN・BN＝2 となることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a は正の定数とする．点 $(x,\ y)$ は条件

$$a|x|+|y|\leqq a$$

を満たす．

(1)　$y-(x+1)^2$ の最小値を求めよ．

(2)　$y-(x+1)^2$ の最大値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　単位円周上に点 P と点 Q がある．線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とし，線分 OQ が x 軸の正の向きとなす角を 3θ とする．ただし，点 Q は第 3 象限または第 4 象限にあるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　線分 PQ の中点を M とする．M の座標を θ を用いて表せ．

(2)　M の x 座標の最大値および最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$f(x)=x^3-2x^2+x-1$ に関する以下の各問いに答えよ.

(1)　$f(a)=0$, $1<a<2$ を満たす実数 a が1つだけ存在することを示せ.

(2)　(1)の a について, 3次関数 $g(x)=x^3+bx^2+cx+d$ が $g\left(-\dfrac{1}{a}\right)=0$ を満たすように, b, c, d の値を定めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 xy 平面上に直線 l：$y=x+2$ と曲線 C：$y=1-x^2$ がある．直線 l 上を動く点Ｐから曲線 C に異なる２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．線分ＱＲの中点をＭとするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Ｐの x 座標を t とし，２点Ｑ，Ｒの x 座標をそれぞれ α，β とするとき，$\alpha+\beta=2t$ および $\alpha\beta=-(t+1)$ を示せ．

(2) 点Ｍの軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　動点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標の間に $x=u+v$，$y=u^2+v^2$ という関係がある．点 Q が $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を 3 頂点とする三角形の周上を動くとき，点 P が描く軌跡を図示せよ．また，その図形で囲まれた部分の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　三角形 ABC の辺の長さをそれぞれ AB＝6，BC＝$2\sqrt{13}$，CA＝8 とする．

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2)　三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{AO}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$ と表すとき，l，m の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 空間に２点 $A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{2},\ 0)$ がある．z 軸上に点 $P(0,\ 0,\ p)$ $(p>0)$ があり，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角は $45°$ である．

(1) p の値を求めよ．

(2) ３点 A，B，P を通る平面 α に関して，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ と対称な点の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 等差数列 1, 3, 5, 7, …… を次の(1)または(2)の規則にしたがってそれぞれ初項から順にグループ分けする．それぞれのグループ分けについて，k 番目のグループに含まれる項の和を求めよ．

(1) k 番目のグループに $2k$ 個の項を含める．

(2) k 番目のグループの最初の項が n のとき，k 番目のグループに n 個の項を含める．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　${a_n}^2-2{b_n}^2$ を求めよ．

(3)　(2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を１つ求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　n は 2 以上の自然数とする．袋の中に 1 から n までの数が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている．この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す．この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする．例えば，A，B，C の得点がそれぞれ 4，2，4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A，B，C の 3 人とも勝者である．勝者が k 人（$k=1,\ 2,\ 3$）である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ．

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ．

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上に4点 A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n 秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．

(1)　a_2，c_2，a_4，c_4 を求めよ．

(2)　a_{2n} を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) すべての正の奇数kは，$m>n\geqq 0$を満たす整数m，nによって$k=m^2-n^2$と表されることを示せ.

(2) 正の偶数kで，$m>n\geqq 0$を満たす整数m，nによって$k=m^2-n^2$と表されるものをすべて求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$2 \leqq a < b < c \leqq N$ を満たすすべての整数 a，b，c について不等式
$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2$　が成り立つような正の整数 N のうち最大のものを求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形が囲む領域（境界を含む）を D とする．2 次関数 $f(x)=(x-a)^2+b$（a，b は定数）に対して，次の条件

「放物線 $y=f(x)$ と領域 D が共有点をもつ」

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a を固定したとき，上の条件が成立するような b の値の範囲を a で表せ．

(2)　上の条件を満たす点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍であることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 n は2以上の整数とする．座標平面上の x 座標，y 座標がともに0から $n-1$ までの整数であるような n^2 個の点のうちから，異なる2個の点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を無作為に選ぶ．

(1) $x_1 \neq x_2$　かつ　$y_1 \neq y_2$ である確率を求めよ．

(2) $x_1+y_1=x_2+y_2$ である確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　方程式・不等式・関数

> **1**　a，b を整数とする．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α，β，γ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のうちどれかは整数である．a，b を求めよ．

$x^3+ax^2+bx-1=0$　……①　がもつ整数解は題意より $x=1$，2 に限られる．

$x=2$ を解にもつとき　$8+4a+2b-1=0$　　$4a+2b=-7$

左辺は偶数，右辺は奇数より不適．

よって，①は $x=1$ を解にもち，このとき　$1+a+b-1=0$　　つまり　$b=-a$

このとき①より　$x^3+ax^2-ax-1=0$　　$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$

$f(x)=x^2+(a+1)x+1$ とおくと，題意より

$f(x)=0$ が $0<x<3$ に 1 とは異なる 2 実数解をもつ．

$f(0)=1>0$　　$f(3)=3a+13>0$　より　$a>-\dfrac{13}{3}$

$f(x)$ のグラフの軸：$x=-\dfrac{a+1}{2}$ について　$0<-\dfrac{a+1}{2}<3$ より　$-7<a<-1$

$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D>0$　つまり　$(a+1)^2-4>0$　　$(a+3)(a-1)>0$　　$a<-3$，$1<a$

以上より　$-\dfrac{13}{3}<a<-3$　　a は整数より　$a=-4$

このとき　$f(1)=a+3\neq 0$ より　$f(x)=0$ の解は 1 とは異なり適する．

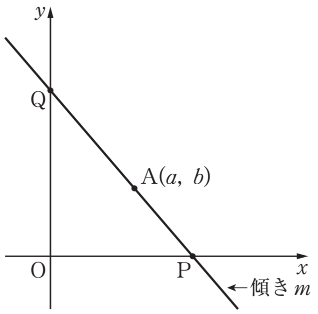
ゆえに　$\boldsymbol{a=-4}$，$\boldsymbol{b=4}$

> **2**　平面上の定点 A(a, b) $(a>0, b>0)$ を通る負の傾きの直線と，x 軸，y 軸がつくる直角三角形について，次の問いに答えよ．
> (1)　この三角形の面積の最小値を求めよ．
> (2)　この三角形の直角をはさむ 2 辺の長さの和の最小値を求めよ．

(1)　定点 A(a, b) を通る負の傾きの直線は $y=m(x-a)+b$ $(m<0)$ とおくことができる．

このとき　P$\left(-\dfrac{b}{m}+a,\ 0\right)$，Q$(0,\ -am+b)$　$(a,\ b>0)$

とおく．△OPQ の面積を S とすると



$$S=\frac{1}{2}\text{OP}\cdot\text{OQ}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{m}\right)(-am+b)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-ma^2+\frac{b^2}{-m}\right)+ab$$

ここで $m<0$，a，$b>0$ より (相加平均)≧(相乗平均) から

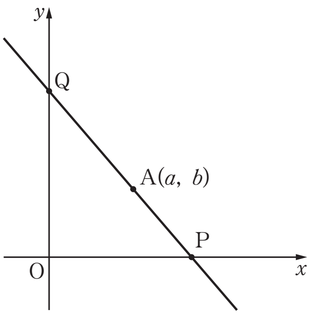
$$S\geqq\sqrt{(-ma^2)\cdot\left(-\frac{b^2}{m}\right)}+ab=2ab$$　等号成立は　$-ma^2=\dfrac{b^2}{-m}$

つまり　$m=-\dfrac{b}{a}(<0)$ のとき

ゆえに，求める三角形の面積の最小値は $\boldsymbol{2ab}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　△OPQ の直角をはさむ 2 辺の長さの和を l とすると



$$l=\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=\left(a-\frac{b}{m}\right)+(-am+b)$$

$$=-ma+\frac{b}{-m}+a+b$$

ここで，$m<0$，a，$b>0$ より（相加平均）≧（相乗平均）から

$$l\geqq 2\sqrt{(-ma)\cdot\left(-\frac{b}{m}\right)}+a+b=2\sqrt{ab}+a+b$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

等号成立は　$-ma=\dfrac{b}{-m}$　つまり　$m=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,(<0)$　のとき

ゆえに，求める長さの最小値は　$\boldsymbol{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$

【別解】　(1)　点 P$(p,\ 0)$，Q$(0,\ q)$　$(p,\ q>0)$ とおくと，直線 PQ の方程式は

$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ となり，これが定点 A$(a,\ b)$ を通るとき　$\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}=1$　……①　である．

このとき，△OPQ の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}pq$　この最小値を求める．

$a,\ b,\ p,\ q>0$ より　$1=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\geqq 2\sqrt{\dfrac{ab}{pq}}$

つまり　$\sqrt{pq}\geqq 2\sqrt{ab}$　である．等号成立は　$\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{1}{2}$　つまり　$p=2a$，$q=2b$　のとき．

よって　$pq\geqq 4ab$ である．$S\geqq\dfrac{1}{2}\cdot 4ab=2ab$　より　求める面積の最小値は $\boldsymbol{2ab}$ である．

(2)　△OPQ の直角をはさむ 2 辺の長さの和を l とすると　$l=p+q$　この最小値を求める．

①より　$\dfrac{b}{q}=1-\dfrac{a}{p}=\dfrac{p-a}{p}$　よって　$q=\dfrac{bp}{p-a}=\dfrac{ab}{p-a}+b$

このとき　$l=p+q=p+\dfrac{ab}{p-a}+b=p-a+\dfrac{ab}{p-a}+a+b$

$p-a>0$，$ab>0$ より　$l\geqq 2\sqrt{(p-a)\cdot\dfrac{ab}{p-a}}+a+b=2\sqrt{ab}+a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

等号成立は　$p-a=\dfrac{ab}{p-a}$　$p=a+\sqrt{ab}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$，$q=b+\sqrt{ab}=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

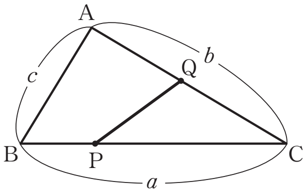
ゆえに求める長さの最小値は　$\boldsymbol{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ である．

> **3**　$a,\ b,\ c$ を 3 辺とする三角形がある．この三角形の面積を二等分する線分の長さの最小値は $\sqrt{2(s-a)(s-b)}$ となることを証明せよ．ただし，$a\geqq b\geqq c$，$a+b+c=2s$ とする．

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ である △ABC と，それを分ける線分 PQ について考える．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(i)　CP$=x$，CQ$=y$ となる点 P，Q をそれぞれ辺 BC，AC 上にとるとき



(最大辺)

$\triangle$CPQ$=\dfrac{1}{2}\triangle$ABC より　$\dfrac{1}{2}xy\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}ab\sin C$

よって　$xy=\dfrac{1}{2}ab$（一定）

$\triangle$ABC で余弦定理より　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\triangle$CPQ で余弦定理より

$\mathrm{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos C=(x-y)^2+2xy-2xy\cos C\geqq 2xy(1-\cos C)$

等号成立は　$x=y$　つまり　$x=y=\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$　……①のとき．

ここで，$a<b+c$，$c\leqq b\leqq a$ より　$a<b+c\leqq b+b$　つまり　$b>\dfrac{a}{2}$ より　$b>\sqrt{\dfrac{ab}{2}}=y$

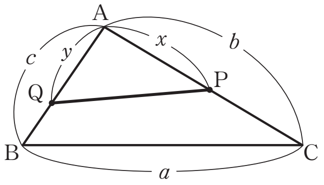
よって①を満たす点 Q を線分 AC 上に必ずとることができる．

ゆえに，PQ^2 の最小値は

$$ab\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(c+a-b)(c-a+b)=\frac{1}{2}(2s-b-b)(2s-a-a)=2(s-a)(s-b)$$

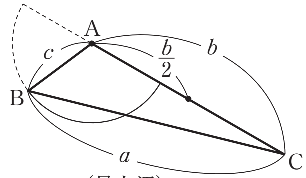
(ii)　AP$=x$，AQ$=y$ となる点 P，Q をそれぞれ辺 AC，AB 上にとるとき



(i)と同様に考えると PQ^2 の最小値は

$x=y=\sqrt{\dfrac{bc}{2}}$ のとき　$2(s-b)(s-c)$　となる．

ところが，$c<\dfrac{b}{2}$ であるとき　$c<\sqrt{\dfrac{bc}{2}}=y$ となり

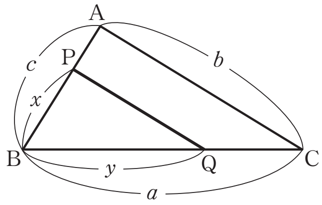


(最大辺)

線分 AB 上に Q をとることができない．よって，このときは PQ^2 の最小値は $2(s-b)(s-c)$ より大きくなる．

$c\geqq\dfrac{b}{2}$ のとき　PQ^2 の最小値は　$2(s-b)(s-c)$

(iii)　BP$=x$，BQ$=y$ となる点 P，Q をそれぞれ辺 BA，BC 上にとるとき



$c<\dfrac{a}{2}$ のとき　PQ^2 の最小値は $2(s-c)(s-a)$ より大きい値であり

$c\geqq\dfrac{a}{2}$ のとき　PQ^2 の最小値は $2(s-c)(s-a)$ である．

(i)(ii)(iii)および $a\geqq b\geqq c$ より，PQ の最小値は $\sqrt{2(s-a)(s-b)}$　である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

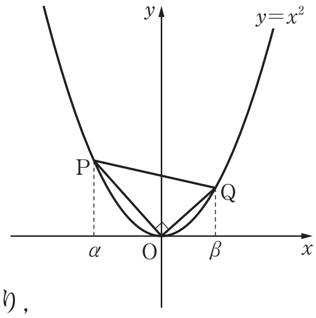
第2講　図形と方程式

1　2点P，Qは，放物線 $y=x^2$ 上を $\angle$POQ が直角であるように動く．ただし，Oは原点である．

(1)　線分PQは定点を通ることを示せ．

(2)　線分PQの長さの最小値を求めよ．

$P(\alpha,\ \alpha^2)$，$Q(\beta,\ \beta^2)$　$(\alpha<\beta)$　とする．



(1)　直線OPの傾きは $\dfrac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$，直線OQの傾きは β である．

よって，条件より　$\alpha\cdot\beta=-1$　……①

直線PQの方程式は　$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$

つまり　$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

①より　$y=(\alpha+\beta)x+1$　よって，直線PQは定点 $(0,\ 1)$ を通り，

$\alpha<0<\beta$ より，これは線分PQ上にある．

(2)　PQの傾き $\alpha+\beta$ を m とおくと，

$$PQ^2=\{(\beta-\alpha)\sqrt{1+m^2}\}^2=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}(1+m^2)=(m^2+4)(m^2+1)$$

$m^2\geqq 0$ より，これが最小となるのは $m=0$ のとき

ゆえに，PQの最小値は　$\sqrt{4\cdot 1}=\mathbf{2}$

2　a，b，c は0以上の実数とする．3点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，$C(1,\ c)$ は，$\angle ABC=30^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$ を満たす．

(1)　c を求めよ．

(2)　ABの長さの最大値と最小値を求めよ．

$\triangle$ABCは $\angle C=90^\circ$ の直角三角形より，ABを直径とする円に内接する．

また，$\angle AOB=90^\circ$ より点Oもこの円上にある．

(1)　$\angle COA=\angle CBA=30^\circ$ より直線OCの方程式は　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

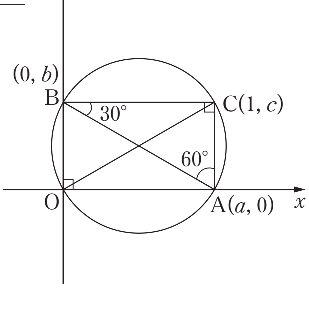
これに点 $C(1,\ c)$ の座標の値を代入して　$\boldsymbol{c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)　ABを直径とする円の方程式は　$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{4}$

つまり　$x^2+y^2-ax-by=0$

これに点 $C\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の座標の値を代入して

$$1+\frac{1}{3}-a-\frac{b}{\sqrt{3}}=0 \qquad よって\quad b=\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}-a\right)$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，a，$b \geqq 0$ より　$\frac{4}{3}-a \geqq 0$　　よって　$0 \leqq a \leqq \frac{4}{3}$

したがって　$AB^2=a^2+b^2=a^2+3\left(\frac{4}{3}-a\right)^2=4a^2-8a+\frac{16}{3}=4(a-1)^2+\frac{4}{3}$ より

AB は　$a=0$，$b=\frac{4}{\sqrt{3}}$ で最大値　$\sqrt{\frac{16}{3}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

$a=1$，$b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ で最小値　$\sqrt{\frac{4}{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$　をとる．

3　x，y は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ とするとき，$\frac{2x-y+1}{x-y+3}$ の最大値と最小値を求めよ．

$\frac{2x-y+1}{x-y+3}=k$　……①　とおき，実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たすときの k の最大値，最小値を求める．

①より　$k(x-y+3)-(2x-y+1)=0$　これは点 $(2,\ 5)$ を通る直線を表す．

また，①は　$(k-1)y=(k-2)x+3k-1$　であり

$k=1$ のとき　$x=2$　これは $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たさず不適．よって $k \neq 1$ であることより

$y=\frac{k-2}{k-1}x+\frac{3k-1}{k-1}$　と変形できる．

この直線が円 $x^2+y^2=1$ と共有点をもつとき　$x^2+\left(\frac{k-2}{k-1}x+\frac{3k-1}{k-1}\right)^2=1$

$(k-1)^2x^2+(k-2)^2x^2+2(k-2)(3k-1)x+(3k-1)^2=(k-1)^2$

$(2k^2-6k+5)x^2+2(3k^2-7k+2)x+8k^2-4k=0$

この式の判別式を D とすると　$D \geqq 0$ より

$(3k^2-7k+2)^2-(2k^2-6k+5)(8k^2-4k) \geqq 0$

$7k^4-14k^3+3k^2+8k-4 \leqq 0$

$(k-1)^2(7k^2-4) \leqq 0$

$k \neq 1$ より　$-\frac{2}{\sqrt{7}} \leqq k \leqq \frac{2}{\sqrt{7}}$　これが k のとりうる値の範囲である．

ゆえに，$\frac{2x-y+1}{x-y+3}$ の最大値は　$\mathbf{\frac{2}{\sqrt{7}}}$，最小値は　$\mathbf{-\frac{2}{\sqrt{7}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　微分法・積分法①

1　点 $(x,\ y)$ が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ．

(1)　$x+y$　　(2)　x^4+y^4　　(3)　x^3+y^3

$(x,\ y)$ は単位円上の点より　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$　とおける．

(1)　$x+y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$ より　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x+y\leqq\sqrt{2}}$

(2)　$x^4+y^4=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\sin^2\theta)^2+(\cos^2\theta)^2=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\left(\dfrac{\sin2\theta}{2}\right)^2=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$　　$0\leqq\sin^2 2\theta\leqq1$ より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq x^4+y^4\leqq1}$

(3)　$x^3+y^3=\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

ここで，$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$　　また，(1)より　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

よって　$x^3+y^3=t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$　　これを $f(t)$ とおくと

$f'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(t+1)(t-1)$

最大値　$f(1)=1$　　最小値　$f(-1)=-1$　　よって　$\boldsymbol{-1\leqq x^3+y^3\leqq1}$

2　曲線 $y=ax^3-ax\ (a\neq0)$ 上に異なる２点Ｐ，Ｑがあり，Ｐにおける接線とＱにおける接線がともに直線PQと直交している．このようなＰ，Ｑが存在するための a の範囲を求めよ．

点Ｐ，点Ｑの x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする．

$f(x)=ax^3-ax$ とおくと　$f'(x)=3ax^2-a=a(3x^2-1)$

Ｐにおける接線の傾きは　$a(3\alpha^2-1)$　　Ｑにおける接線の傾きは　$a(3\beta^2-1)$

題意よりＰ，Ｑにおける接線が平行である．よって

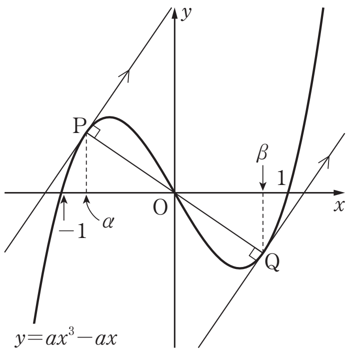
$a(3\alpha^2-1)=a(3\beta^2-1)$

$a\neq0$ より　$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0$　　$\alpha\neq\beta$ より　$\beta=-\alpha$　……①

また，直線PQの傾きは　$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{a\{(\beta^3-\alpha^3)-(\beta-\alpha)\}}{\beta-\alpha}=a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-1)$

直交条件より　$a(3\alpha^2-1)\times a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-1)=-1$　……②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



①を②に代入して　$\alpha^2(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)=-1$

明らかに，$\alpha\neq\pm1,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\alpha^2=\dfrac{-1}{(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)}$

ここで　$(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)=3\left(\alpha^2-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$　であり

$\alpha<\beta$ より　$\alpha<-\alpha$　　つまり　$\alpha<0$ より　$\alpha^2>0$

よって　$0>(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)\geqq-\dfrac{1}{3}$　より

$$\frac{1}{(3\alpha^2-1)(\alpha^2-1)}\leqq-3\qquad つまり\quad \alpha^2\geqq3$$

ゆえに　$\boldsymbol{\alpha\leqq-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\leqq\alpha}$

3　$f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$ とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ．また，$1<\alpha<2$ であることを示せ．

(2)　方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする．α と β の大小を比較せよ．

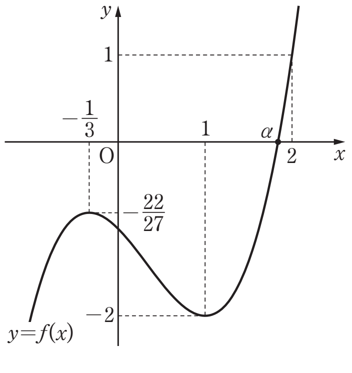
(3)　α^2 と β^3 の大小を比較せよ．

---

(1)　$f(x)=x^3-x^2-x-1$ より　$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

増減表よりグラフは右図.

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↗	$-\dfrac{22}{27}$	↘	-2	↗	1	



よって　$f(x)=0$ はただ 1 つの実数解 α をもち，$1<\alpha<2$ である.

(2)　$g(x)=0$ より　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　よって　$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$ より　$\dfrac{3}{2}<\beta<2$　　また，$\beta^2-\beta-1=0$

ここで　$f(x)=g(x)\cdot x-1$　より　$f(\beta)=g(\beta)\cdot\beta-1=-1<0$

ゆえに，(1)のグラフより　$\boldsymbol{\beta<\alpha}$

(3)　$\beta^2=\beta+1$ より　$\beta^3=\beta^2+\beta=2\beta+1=\sqrt{5}+2$　　よって　$4<\beta^3<5$

また　$1<\alpha<2$ より　$1<\alpha^2<4$

ゆえに　$\boldsymbol{\alpha^2<\beta^3}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法②

1　平面上に放物線 $y=x^2-5x+6$ と直線 $y=kax-a^2-5a$ がある．

(1)　すべての実数 a に対して放物線と直線が異なる２点で交わるような定数 k の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた範囲にあって，放物線と直線で囲まれる部分の面積が a によらず一定になるような定数 k を求めよ．

(1)　放物線 $y=x^2-5x+6$ と直線 $y=kax-a^2-5a$ の交点の x 座標は

$x^2-5x+6=kax-a^2-5a$　つまり　$x^2-(ka+5)x+a^2+5a+6=0$　……①　の２解．

①が a に関わらず異なる２実数解をもてばよい．よって①の判別式を D_1 とすると

$D_1=(ka+5)^2-4(a^2+5a+6)=(k^2-4)a^2+2(5k-10)a+1$　これを $f(a)$ とすると

$f(a)>0$ がすべての実数 a で成り立てばよい．

$k=2$ のとき　$f(a)=1>0$ より成立．

$k=-2$ のとき　$f(a)=-40a+1>0$　これはすべての a では成立せず不適．

$k\neq\pm2$ のとき　$f(a)$ は２次関数．

よって　$k^2-4>0$　かつ　$f(a)=0$ で判別式 $D_2<0$ であればよい．

$k^2-4>0$ より　$k<-2,\ 2<k$

$$\frac{D_2}{4}=(5k-10)^2-(k^2-4)<0 \qquad 6k^2-25k+26<0$$

$$(k-2)(6k-13)<0 \qquad 2<k<\frac{13}{6}$$

以上より　$\boldsymbol{2\leqq k<\frac{13}{6}}$

(2)　$2\leqq k<\dfrac{13}{6}$ のとき，①の２解を $\alpha,\ \beta$（$\alpha<\beta$）とすると

$$\alpha=\frac{ka+5-\sqrt{f(a)}}{2},\quad \beta=\frac{ka+5+\sqrt{f(a)}}{2}$$

このとき，題意の放物線と直線で囲まれる部分の面積は

$$S=\int_\alpha^\beta\{(kax-a^2-5a)-(x^2-5x+6)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\beta-\alpha=\sqrt{f(a)}$ より　S すなわち $f(a)$ が a によらず一定になるのは

$k^2-4=0$　かつ　$5k-10=0$　のときである．　ゆえに　$\boldsymbol{k=2}$

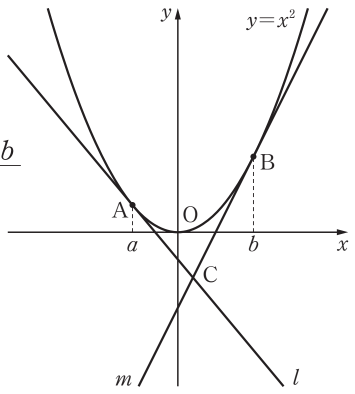
2　放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1)　２直線 $l,\ m$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2)　点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$



接線 l の方程式は　$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

接線 m の方程式は　$y=2bx-b^2$

この2式より y を消去して　$2ax-a^2=2bx-b^2$　　$x=\dfrac{a+b}{2}$

よって l と m の交点Cの座標は　$\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

題意の面積は

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

(2)　$C(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{a+b}{2}$，$Y=ab$

Cが放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ 上の点より　$Y=\dfrac{1}{2}X^2-X-2$

ここで　$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=4X^2-4Y=2X^2+4X+8=2(X+1)^2+6$　より

$b-a$ は，$X=-1$ のとき最小値 $\sqrt{6}$ となる．よって，求める S の最小値は

$$\frac{1}{12}(\sqrt{6})^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

3　a を定数とし，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=x^2-3\qquad\qquad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が2つの共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする．C_a の面積を a で表せ．

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも1つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ．

(1)　$f(x)=g(x)$ より　$9x^2-12ax+5a^2-9=0$　……①

①の判別式を D とすると，①が異なる2実数解をもつのは

$\dfrac{D}{4}=36a^2-9(5a^2-9)=-9a^2+81>0$　のとき　　ゆえに　$\boldsymbol{-3<a<3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　①の 2 解を α，β（$\alpha<\beta$）とすると，$x=\dfrac{6a\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{9}=\dfrac{6a\pm3\sqrt{9-a^2}}{9}=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$

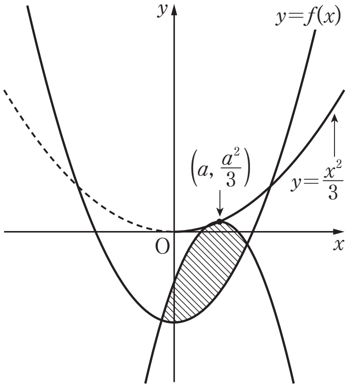
より　$\alpha=\dfrac{2a-\sqrt{9-a^2}}{3}$，$\beta=\dfrac{2a+\sqrt{9-a^2}}{3}$

よって，C_a の面積は

$$\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{27}(9-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3)　$y=g(x)$ のグラフの頂点は $\left(a,\ \dfrac{a^2}{3}\right)$



これは放物線 $y=\dfrac{x^2}{3}$ 上にある．

a が(1)の範囲を動くとき右図より

題意の図形は $y\geqq f(x)$ の表す領域と

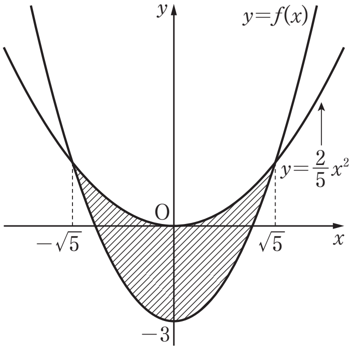
放物線 $y=g(x)$ の通過領域の共通部分である．

ここで　$g(x)=y=-2x^2+4ax-\dfrac{5}{3}a^2$ のグラフが，

ある点 $(X,\ Y)$ を通ることは

$Y=-2X^2+4aX-\dfrac{5}{3}a^2$，すなわち　$5a^2-12Xa+6X^2+3Y=0$　を満たす実数 a が存在することと同値であり，それはこの a に関する 2 次方程式の判別式が 0 以上になることである．

$36X^2-5(6X^2+3Y)\geqq0$　　$Y\leqq\dfrac{2}{5}X^2$　　これが　$y=g(x)$ のグラフ上の点 $(X,\ Y)$ が満たすべき領域，すなわち通過領域である．



$y=f(x)$ と $y=\dfrac{2}{5}x^2$ のグラフの交点の x 座標は

$x=\pm\sqrt{5}$

ゆえに求める面積は

$$2\int_0^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx=2\left[-\frac{1}{5}x^3+3x\right]_0^{\sqrt{5}}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

$\Bigg($または $\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx$

$$=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}-\frac{3}{5}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})dx=-\frac{3}{5}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3\right\}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}\Bigg)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ベクトル

1　三角形 ABC において，

$|\overrightarrow{AB}|=4,\ |\overrightarrow{AC}|=5,\ |\overrightarrow{BC}|=6$

である．辺 AC 上の点 D は BD⊥AC を満たし，辺 AB 上の点 E は CE⊥AB をみたす．CE と BD の交点を H とする．

(1)　$\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AC}$ となる実数 r を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BAC=4\times5\times\dfrac{16+25-36}{2\times4\times5}=\dfrac{5}{2}$

$\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AC}=r\vec{c}$　とおくと

BD⊥AC より $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　　$(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$　　$(r\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

$r|\vec{c}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　$5r-\dfrac{1}{2}=0$　　ゆえに　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{10}}$

(2)　(1)と同様に　$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$ とおくと

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$　　$\vec{b}\cdot(\vec{c}-k\vec{b})=0$　　$\dfrac{5}{2}-16k=0$　　$k=\dfrac{5}{32}$　……☆

ここで　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=s\overrightarrow{AB}+t\times10\overrightarrow{AD}$　　H は BD 上より　$s+10t=1$

また　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=s\times\dfrac{32}{5}\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AC}$　　H は EC 上より　$\dfrac{32}{5}s+t=1$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{1}{7},\ t=\dfrac{3}{35}}$

【別解】　☆の後に

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\cos\angle CAH=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{AC}|^2$　……①

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|\cos\angle BAH=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|=\dfrac{5}{32}|\overrightarrow{AB}|^2$　……②

①より　$\vec{c}\cdot(s\vec{b}+t\vec{c})=\dfrac{1}{10}\times25$　　よって　$\dfrac{5}{2}s+25t=\dfrac{25}{10}$

②より　$\vec{b}\cdot(s\vec{b}+t\vec{c})=\dfrac{5}{32}\times16$　　よって　$16s+\dfrac{5}{2}t=\dfrac{5}{2}$

ゆえに　$\boldsymbol{s=\dfrac{1}{7},\ t=\dfrac{3}{35}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　平面上の 3 点 O，A，B は条件 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=1$ を満たす.

(1)　$|\overrightarrow{AB}|$ および三角形 OAB の面積を求めよ.

(2)　点 P が平面上を $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OB}|$ を満たしながら動くときの三角形 PAB の面積の最大値を求めよ.

(1)　$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=1$　より　$1+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1$　……①

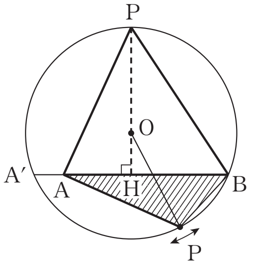
$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=1$　より　$4+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1$　……②

①，②より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{2}$　　$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$

よって　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=3-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1=7$　　ゆえに　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\times3-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

(2)　$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$ を満たす動点 P（右図）について



O を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円と直線 AB との交点のうち

B と異なる方を A′ とすると，直線 OP が弦 A′B の垂直二等分線

となるときの点 P が △PAB の面積を最大にする点である.

O から AB に下ろした垂線の足 H について

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}AB\times OH$ より　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times OH$

よって　$OH=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

よって求める △PAB の最大値は

$$\frac{1}{2}\times AB\times(OH+OP)=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sqrt{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(1+2\sqrt{7})}{4}}$$

2　[2]　a，c を実数とする．空間内の 4 点 O(0，0，0)，A(2，0，a)，B(2，1，5)，C(0，1，c) は同一平面上にある.

(1)　c を a で表せ.　　(2)　四角形 OABC の面積の最小値を求めよ.

(1)　$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ となる α，β が存在する.

つまり　$(0,\ 1,\ c)=\alpha(2,\ 0,\ a)+\beta(2,\ 1,\ 5)$　より　$\alpha+\beta=0$，$\beta=1$，$a\alpha+5\beta=c$

よって　$\alpha=-1$，$\beta=1$　　ゆえに　$\boldsymbol{c=-a+5}$

(2)　$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ より　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$　　よって，四角形 OABC は平行四辺形

$OA=\sqrt{4+a^2}$，$OC=\sqrt{1+c^2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=ac$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

四角形OABC

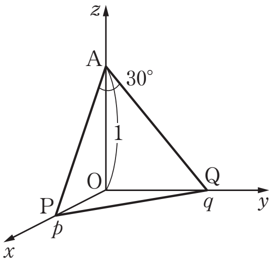
$=2\triangle \mathrm{OAC}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\sqrt{(4+a^2)(1+c^2)-a^2c^2}$

$=\sqrt{a^2+4c^2+4}=\sqrt{a^2+4(-a+5)^2+4}=\sqrt{5a^2-40a+104}=\sqrt{5(a-4)^2+24}$

よって，$a=4$ のとき　四角形OABCは最小値　$\sqrt{24}=\mathbf{2\sqrt{6}}$　をとる.

3　四面体OAPQにおいて，$\lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である. (1)　△APQの面積 S を求めよ.　　(2)　$\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert$ のとり得る範囲を求めよ. (3)　四面体OAPQの体積 V の最大値を求めよ.

題意より，A(0, 0, 1)，P(p, 0, 0)，Q(0, q, 0)（$p>0$，$q>0$）とおける.



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(p,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(0,\ q,\ -1)$　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=1$　……①

また，∠PAQ＝30° より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……②

①，②より　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{3}-1}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$　より　$(p^2+1)(q^2+1)=\dfrac{4}{3}$　……③

$p^2+1=\dfrac{4}{3(q^2+1)}$　　$p^2=\dfrac{4}{3(q^2+1)}-1$　（$q>0$）

ここで　$q^2+1>1$　より　$0<\dfrac{1}{q^2+1}<1$　　$0<p^2<\dfrac{1}{3}$　　ゆえに　$\mathbf{0<|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|<\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

(3)　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OPQ}\times\mathrm{OA}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}pq\times1=\dfrac{1}{6}pq$　よって　pq の最大値を求める.

ここで③より　$p^2q^2+p^2+q^2+1=\dfrac{4}{3}$　つまり　$(pq)^2+(p+q)^2-2pq=\dfrac{1}{3}$

$p+q=X$，$pq=Y$ とおくと　$Y^2+X^2-2Y=\dfrac{1}{3}$　　つまり　$X^2+(Y-1)^2=\dfrac{4}{3}$　……④

また，p，q は $t^2-Xt+Y=0$ の2解.

p，q は実数より　$X^2-4Y\geqq0$　$Y\leqq\dfrac{1}{4}X^2$　……⑤

©RECRUIT HOLDINGS

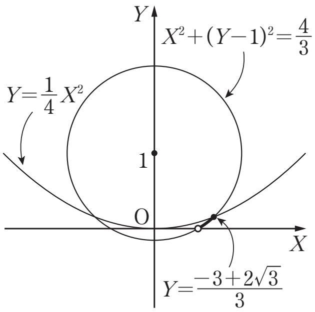
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで　$X^2+(Y-1)^2=\dfrac{4}{3}$　と　$X^2=4Y$　の交点の Y 座標は

$$Y^2+2Y=\frac{1}{3} \qquad 3Y^2+6Y-1=0 \qquad Y=\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\ (>0)$$

また，$X=p+q>0$

よって，X，Y の満たす領域は右図太線部分.



ゆえに　$0<Y\leqq\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ より

求める V の最大値は　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{18}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

> 1　［1］　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ があって，$c_n=a_n+b_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とおくとき $c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=17$ である．数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を n の式で表せ．ただし，$\{b_n\}$ の初項，公比はともに整数で，公比は0でないとする．

数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とし，数列 $\{b_n\}$ の初項を a'，公比を r とすると

$a_n=a+(n-1)d$，$b_n=a'r^{n-1}$，$c_n=a_n+b_n=a+(n-1)d+a'r^{n-1}$

$c_1=2$　より　$a+a'=2$　……①　　$c_2=5$　より　$a+d+a'r=5$　……②

$c_3=17$　より　$a+2d+a'r^2=17$　……③

①より $a=2-a'$　これを②に代入して　$d+(r-1)a'=3$　……②'

③−②より　$d+(r-1)ra'=12$　……③'

②'，③'より　$(r-1)a'-3=(r-1)ra'-12$　　$(r-1)^2a'=9=3^2$

a'，r は整数より　$(a',\ r-1)=(1,\ \pm3),\ (9,\ \pm1)$

$r\neq0$ より　$(a',\ r)=(1,\ 4),\ (1,\ -2),\ (9,\ 2)$

このときそれぞれ　$(a,\ d)=(1,\ 0),\ (1,\ 6),\ (-7,\ -6)$

ゆえに　$\boldsymbol{c_n=1+4^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{c_n=6n-5+(-2)^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{c_n=-6n-1+9\cdot2^{n-1}}$

> 1　［2］　数列 a_1，a_2，a_3，…… を次のように定める．
>
> $a_1=1$，$a_2=a_3=2$，$a_4=a_5=a_6=3$，……
>
> (1)　与えられた自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ．
>
> (2)　m を自然数とするとき，この数列の初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ．

(1)　$a_i=n$ となる項が第 n 群に属するとすると，第 n 群には n 個の項が属する．

よって，第 n 群の末項は数列 $\{a_n\}$ の第 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 項である．

ゆえに　$a_i=n$ となる i の範囲は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}(n-1)n+1\leqq i\leqq\frac{1}{2}n(n+1)}$　である．

(2)　第 n 群に属する項の総和は　$n\times n=n^2$　である．

数列 $\{a_n\}$ の第 $2m^2$ 項が第 n 群に属するとすると　$\frac{1}{2}(n-1)n<2m^2\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

$(n-1)n<(2m)^2\leqq n(n+1)$　　これを満たす整数 n は $n=2m$ のみ

よって，第 $2m$ 群に属する．

第 $(2m-1)$ 群の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $\frac{1}{2}(2m-1)\cdot2m=(2m^2-m)$ 項であるので，

数列 $\{a_n\}$ の第 $2m^2$ 項は第 $2m$ 群の $2m^2-(2m^2-m)=m$ 番目の項である．

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{2m-1}k^2+2m\times m=\frac{1}{6}(2m-1)\cdot2m\cdot(4m-1)+2m^2=\frac{m}{3}\{(2m-1)(4m-1)+6m\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}m(8m^2+1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 正の整数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 x_n, y_n を定める．

(1) x_{n+1}，y_{n+1} を x_n，y_n で表せ．

(2) n が偶数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=1$，n が奇数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=-1$ であることを証明せよ．

(3) 任意の n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ に近い近似値であることを証明せよ．

$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ において

$n=1$ のとき　$1+\sqrt{2}=x_1+y_1\sqrt{2}$　　x_1，y_1 は整数すなわち有理数より　$x_1=1$，$y_1=1$

(1) $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n=(1+\sqrt{2})(x_n+y_n\sqrt{2})$

$=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}$

x_n，y_n は整数すなわち有理数より　$\boldsymbol{x_{n+1}=x_n+2y_n}$，$\boldsymbol{y_{n+1}=x_n+y_n}$

(2) $x_{n+1}{}^2-2y_{n+1}{}^2=(x_n+2y_n)^2-2(x_n+y_n)^2=x_n{}^2+4x_ny_n+4y_n{}^2-2(x_n{}^2+2x_ny_n+y_n{}^2)$

$=-x_n{}^2+2y_n{}^2=-(x_n{}^2-2y_n{}^2)$，$x_1{}^2-2y_1{}^2=1-2=-1$

よって，数列 $\{x_n{}^2-2y_n{}^2\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列である．

したがって　$x_n{}^2-2y_n{}^2=-1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n=\begin{cases}1 & (n：偶数)\\ -1 & (n：奇数)\end{cases}$

(3) $x_n{}^2-2y_n{}^2=(-1)^n$　より　$(x_n+\sqrt{2}y_n)(x_n-\sqrt{2}y_n)=(-1)^n$

つまり　$(1+\sqrt{2})^n(x_n-\sqrt{2}y_n)=(-1)^n$　　$x_n-\sqrt{2}y_n=\left(\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^n=(1-\sqrt{2})^n$

$y_n>0$ より　$\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^n}{y_n}$　　$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{|1-\sqrt{2}|^n}{y_n}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}$

ここで　$y_{n+1}>y_n$，$0<\sqrt{2}-1<1$　より　$\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}>\dfrac{(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{y_{n+1}}=\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$

よって　$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$　より

任意の n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ に近い近似値である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ (1) 2以上の整数 n に対し $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$ を求めよ．

(2) 任意の正の整数 n に対し $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$ が成り立つことを示せ．

(1) $a_n=\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ とおくと

求める和は

$$\sum_{k=2}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)-2}{2n(n+1)}=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}}$$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n^3-n}>\dfrac{1}{n^3}$ 　よって　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k>\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}$

ゆえに　$\displaystyle\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<\sum_{k=2}^{n}a_k+1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}+1=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{5}{4}$

よって示された．

3 ［2］ 数列 a_1，a_2，a_3，…… が $a_1=a_2=1$，$a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ $(r=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，a_{4n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は3の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ．

$a_1=a_2=1$，$a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ のとき

「a_{4n} が3の倍数」……(※)　を示す．

(Ⅰ) $a_3=a_2+a_1=2$

よって　$a_4=a_3+a_2=3$ より　$n=1$ のとき（※）は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき（※）が成り立つと仮定すると a_{4k} は3の倍数である．

$$a_{4(k+1)}=a_{4k+4}=a_{4k+3}+a_{4k+2}=(a_{4k+2}+a_{4k+1})+a_{4k+2}$$
$$=(a_{4k+1}+a_{4k})+a_{4k+1}+(a_{4k+1}+a_{4k})=3a_{4k+1}+2a_{4k}$$

$3a_{4k+1}$，a_{4k} は3の倍数より，$a_{4(k+1)}$ も3の倍数　よって

（※）は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)(Ⅱ)より，すべての自然数 n で（※）が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

> **1**　1 個のさいころを繰り返し投げ，出た目を順にかけて積を作っていく．
> (1)　n 回さいころを投げたときはじめて積が 12 になる確率 p_n を求めよ．
> (2)　n 回さいころを投げたとき積が 12 である確率 q_n を求めよ．

積が 12 になる出目の積の組合せを考えると，$2 \cdot 6$，$3 \cdot 4$，$2 \cdot 2 \cdot 3$ のみである．

(1)　n 回投げてはじめて積が 12 になるときを考える．

$n=1$ のときにはならない．よって　$p_1=0$

$n=2$ のとき　2 回の出目の組合せは　$(2,\ 6)$，$(3,\ 4)$

出目の出る順を考えてそれぞれ　$2!=2$ 通り　　よって　$p_2=2\cdot\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{9}$

$n \geqq 3$ のときは以下

(i)　n 回目，および 1 から $(n-1)$ 回中 1 回に $(2,\ 6)$ が出て，あとはすべて 1 のとき．

場合の数は　$(n-1)\cdot 2!=2(n-1)$（通り）

(ii)　(i)で $(3,\ 4)$ が出たとき．　　場合の数は $2(n-1)$ 通り

(iii)　n 回目，および 1 から $(n-1)$ 回中 2 回で $(2,\ 2,\ 3)$ が出て，あとはすべて 1 のとき．

場合の数は　${}_{n-1}\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{3!}{2!}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}\cdot 3=\dfrac{3}{2}(n-1)(n-2)$　（通り）

以上より　$p_n=\dfrac{1}{6^n}\left\{2(n-1)+2(n-1)+\dfrac{3}{2}(n-1)(n-2)\right\}=\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(3n+2)}{2\cdot 6^n}}$

これは $n=1,\ 2$ のときも成立する．

(2)　k 回目（$1 \leqq k \leqq n$）にはじめて積が 12 となり，残り $(n-k)$ 回はすべて 1 のときは

$\dfrac{(k-1)(3k+2)}{2\cdot 6^k}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-k}$　通りある．

よって，求める確率は

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(3k+2)}{2\cdot 6^k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\frac{1}{2\cdot 6^n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(3k+2)=\frac{1}{2\cdot 6^n}\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k-2)$$

$$=\frac{1}{2\cdot 6^n}\left\{3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-2n\right\}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 6^n}\cdot\frac{n}{2}\{(n+1)(2n+1)-(n+1)-4\}=\frac{1}{2\cdot 6^n}\cdot\frac{n}{2}\cdot 2(n-1)(n+2)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2\cdot 6^n}}$$

> **2**　[1]　n 個の袋の中にそれぞれ赤球が 1 個，白球が 9 個入っている．これらの n 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出したとき，赤球が奇数個取り出される確率を p_n とする．
> (1)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．
> (2)　p_n を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$n+1$ 個の袋からそれぞれ 1 個ずつ球を取り出したとき，赤球が奇数個取り出されるのは

・n 個の袋から赤球を奇数個取り出し，$n+1$ 個目の袋から白球を取り出すとき

・n 個の袋から赤球を偶数個取り出し，$n+1$ 個目の袋から赤球を取り出すとき

のいずれかである．

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{9}{10}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{10}$　　ゆえに　$\boldsymbol{p_{n+1}=\dfrac{4}{5}p_n+\dfrac{1}{10}}$　……①

(2)　①より　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$,　$p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{5}$

よって　$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$　　ゆえに　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right\}}$

2	[2]　箱 A，箱 B のそれぞれに赤球が 1 個，白球が 3 個，合計 4 個ずつ入っている．1 回の試行で箱 A の球 1 個と箱 B の球 1 個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤球が 1 個，白球が 3 個入っている確率 p_n を求めよ．

$(n+1)$ 回目に題意の条件を満たすのは次の通り．

(i)　n 回目の試行後に A に赤球 1 個，白球 3 個が入っているとき

このとき B には赤球 1 個，白球 3 個が入っている．

$(n+1)$ 回目に A，B ともに赤球，またはともに白球を取り出し交換すればよい．

(ii)　n 回目の試行後に A に赤球 0 個，白球 4 個が入っているとき

このとき B には赤球 2 個，白球 2 個が入っている．

$(n+1)$ 回目に A からは必ず白球を取り出すこととなり，B からは赤球を取り出してそれと交換するとよい．

(iii)　n 回目の試行後に A に赤球 2 個，白球 2 個が入っているとき

$(n+1)$ 回目に B からは必ず白球を取り出すこととなり，A からは赤球を取り出してそれと交換するとよい．

よって　$p_{n+1}=p_n\left\{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{2}$　より

$p_{n+1}=\dfrac{1}{8}p_n+\dfrac{1}{2}$　　つまり　$p_{n+1}-\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{8}\left(p_n-\dfrac{4}{7}\right)$,　$p_0-\dfrac{4}{7}=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$

したがって　$p_n-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$　　ゆえに　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n 枚のカードがあり，1枚目のカードに1，2枚目のカードに2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に1枚を取り出してもとに戻すことを3回行う．取り出されたカードに書かれている数を取り出された順に x, y, z とする．

(1)　$x>y$ となる確率 p を求めよ．

(2)　$2x=y+z$ となる確率 q を求めよ．

(1)　z は任意．x，y のすべての場合の数は　n^2 通り

$x>y$ となる場合は，n 枚中2枚を取り出し，それを大きい順に x，y とした場合の数と同じで，${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り．ゆえに，求める確率は　$p=\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2n}}$

(2)　どのカードが取り出されることも，その回数によらず同様に確からしい．

$2x=y+z$ が成り立つとき，x，y を適正に決めれば z も決まることから

x をある値に決めたとき y が何通りあるかを求め，x を動かして合計すればよい．

$x=k$　($k=1$, 2, ……, n) と決めたとき　$2x$ すなわち $2k$ の値に注目する．

(i)　$2k\leqq n$　つまり　$1\leqq k\leqq\dfrac{n}{2}$ のとき　$y=1$, 2, ……, $2k-1$ の $(2k-1)$ 通り．

(ii)　$n<2k$　つまり　$\dfrac{n}{2}<k\leqq n$ のとき

$y\leqq n$　かつ　$z\leqq n$　　すなわち　$2k-n\leqq y\leqq n$ の

$n-(2k-n)+1=2n-2k+1$ (通り)

n が偶数のとき　$n=2m$ とおくと

(i)　$k\leqq m$ のとき　　(ii)　$m+1\leqq k$ のとき　　であるから

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)+\sum_{k=m+1}^{n}(2n-2k+1)=m^2+\sum_{k=m+1}^{n}2n-\sum_{k=m+1}^{n}(2k-1)$$

$$=m^2+2n\cdot(n-m)-(n^2-m^2)=m^2+(n-m)^2=\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{2}$$

n が奇数のとき　$n=2m-1$ とおくと

(i)　$k\leqq m-1$ のとき　　(ii)　$m\leqq k$ のとき　　であるから

$$\sum_{k=1}^{m-1}(2k-1)+\sum_{k=m}^{n}(2n-2k+1)=(m-1)^2+2n\cdot(n-m+1)-\{n^2-(m-1)^2\}$$

$$=(m-1)^2+(n-m+1)^2=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2+1}{2}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より　$q=\begin{cases} \dfrac{\frac{n^2}{2}}{n^3}=\dfrac{1}{2n} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{\frac{n^2+1}{2}}{n^3}=\dfrac{n^2+1}{2n^3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　整数問題

1　[1]　連続している2個以上の正の整数がある．これらの整数の和をSとして次の問いに答えよ． (1)　$S=64$とはなりえないことを示せ． (2)　$S=200$となるとき，連続している整数のうち最小，最大のものをそれぞれ求めよ．

題意の整数のうち，最小のものをa，個数をnとすると

$$S=\frac{n\{a+a+(n-1)\cdot 1\}}{2}=\frac{n(2a+n-1)}{2}$$

(1)　$S=64$より　$n(2a+n-1)=128=2^7$　……①

nと$2a+n-1$は偶奇を異にする．また，$n<2a+n-1$より①を満たすのは$n=1$のときのみ．よって，個数が1個となり不適．ゆえに$S=64$にはなりえない．

(2)　$S=200$より　$n(2a+n-1)=400=2^4\cdot 5^2$

よって　$(n,\ 2a+n-1)=(2^4,\ 5^2),\ (5,\ 2^4\cdot 5)$のみ．

したがって　$(a,\ n)=(5,\ 16),\ (38,\ 5)$

ゆえに　**最小5，最大20**　または　**最小38，最大42**

1　[2]　p，qは素数で$p<q$とする． (1)　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$を満たす整数$r$は存在しないことを示せ． (2)　$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$を満たす整数$r$が存在するのは，$p=2$，$q=3$のときに限ることを示せ．

(1)　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$が成り立つ整数$r$が存在するとする．

$r(p+q)=pq$　　p，qは互いに素より$p+q$はpの倍数でもqの倍数でもない．

よって　$r=kpq$（k：整数）とおける．

このとき　$k(p+q)=1$　　p，qは自然数より　$k=1$，$p+q=1$

これを満たす素数p，qは存在しない．ゆえに$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$を満たす整数$r$は存在しない．

(2)　(1)と同様に考えると　$k(p-q)=1$　より　$k=\pm 1$，$p-q=\pm 1$（複号同順）

$p<q$より　$q-p=1$

よってpとqは偶奇を異にし，素数で偶数は2のみより　$p=2$，$q=3$のときに限る．

2　すべての正の整数nに対して5^n+an+bが16の倍数となるような16以下の正の整数a，bを求めよ．

$a_n=5^n+an+b$とおく．

$a_1=5+a+b$　　$a_2=25+2a+b$　　これらがともに16の倍数より

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$a_2-a_1=a+20$ も 16 の倍数である.

$1\leqq a\leqq 16$ より　$a+20=32$　つまり　$a=12$ に限られる.

このとき　$a_1=b+17$

これが 16 の倍数となるのは　$1\leqq b\leqq 16$ より　$b+17=32$　つまり　$b=15$ に限られる.

よって　$a=12$, $b=15$ であることが必要.

このとき　$a_n=5^n+12n+15$　これが 16 の倍数であると仮定すると　$5^n=a_n-12n-15$ より

$$a_{n+1}=5^{n+1}+12(n+1)+15=5\cdot5^n+12(n+1)+15=5(a_n-12n-15)+12(n+1)+15$$
$$=5a_n-48n-48=5a_n-16(3n+3)$$

よって, a_{n+1} も 16 の倍数. したがって, すべての自然数 n で a_n は 16 の倍数となる.

ゆえに　$\boldsymbol{a=12}$, $\boldsymbol{b=15}$

3　x は 0 でない実数とする.

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$ が整数ならばすべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ.

(2)　$x-\dfrac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば $x^2-\dfrac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ.

---

(1)　$a_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ とおく. $a_1=x+\dfrac{1}{x}$ が整数のとき　$a_2=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$　より

a_2 も整数.

ここで　a_{k+1}, a_k が整数であると仮定すると

$$a_{k+2}=x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}=\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)=a_{k+1}\cdot a_1-a_k$$

よって, a_{k+2} も整数.

ゆえに, すべての自然数 n で a_n すなわち $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ は整数である.

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$

$x+\dfrac{1}{x}=a$, $x-\dfrac{1}{x}=b$ とおく. 条件より b は 0 以外の整数である.

$a^2=b^2+4$ より b^2+4 が平方数のとき a は整数となる.

$$a^2-b^2=4 \qquad \text{つまり} \quad (a+b)(a-b)=4$$

ここで　$(a+b)+(a-b)=2a$ より, $a+b$, $a-b$ は偶奇を共にする.

よって　$(a+b,\ a-b)=(2,\ 2)$, $(-2,\ -2)$

つまり　$(a,\ b)=(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ に限られる. ところがいずれも $b\neq0$ に反する.

したがって b^2+4 は平方数ではない, すなわち, a は無理数である.

ゆえに　$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=ab$ は無理数, つまり整数ではない.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　$2 \leqq a < b \leqq M$ を満たすすべての整数 a, b について不等式

$$3(a^2+b^2) < 2(a+b)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

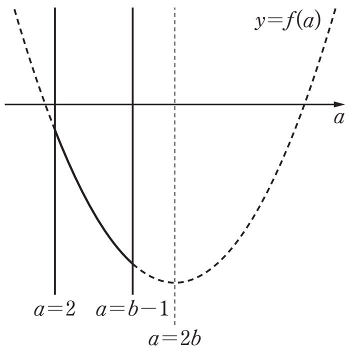
が成り立つような正の整数 M のうち最大のものを求めよ.

$2 \leqq a < b \leqq M$ より，b を $3 \leqq b \leqq M$ に固定すると

①すなわち　$a^2-4ba+b^2<0$ は a の 2 次不等式である.

$$f(a)=a^2-4ba+b^2=(a-2b)^2-3b^2 \quad (2 \leqq a \leqq b-1)$$

グラフの軸は $a=2b$



また，$2b-(b-1)=b+1>0$ より　$b-1<2b$

よって　$f(a)<0$ が $2 \leqq a \leqq b-1$ のすべての a で成り立つのは　$f(2)<0$ のときである.

よって　$b^2-8b+4<0$　　つまり　$4-2\sqrt{3}<b<4+2\sqrt{3}$

b は整数より　$1 \leqq b \leqq 7$

ここで b を $3 \leqq b \leqq M$ で動かしたとき

$3 \leqq b \leqq M$　ならば　$1 \leqq b \leqq 7$　が成り立つ整数 M のうち最大のものは $\boldsymbol{M=7}$ である.

2　座標平面の x 軸上に定点 A(1, 0), B(−1, 0), y 軸上に定点 C(0, 1), D(0, −1) がある．この平面上の動点 P から線分 AB 上の点までの距離の最大値を M(P)，最小値を m(P) とする．条件

(ア)　$M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ または $M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$　　　(イ)　$m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ かつ $m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$

をともに満たす点 P の存在範囲を K とする．ただし，PC，PD は線分の長さを表す.

(1)　K を図示せよ.

(2)　2 直線 $x=1$，$x=-1$ の間にある K の部分の面積を求めよ.

$\mathrm{P}(X, Y)$ とおくと

$$\mathrm{PA}^2=(X-1)^2+Y^2 \quad \mathrm{PB}^2=(X+1)^2+Y^2 \quad \mathrm{PC}^2=X^2+(Y-1)^2 \quad \mathrm{PD}^2=X^2+(Y+1)^2$$

(1)(i)　$X \geqq 1$ のとき　$M(\mathrm{P})=\mathrm{PB}$　　$m(\mathrm{P})=\mathrm{PA}$

(ア)より　$(X+1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y-1)^2$　または　$(X+1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y+1)^2$

つまり　$Y \leqq -X$　または　$Y \geqq X$　……①

(イ)より　$(X-1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y-1)^2$　かつ　$(X-1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y+1)^2$

つまり　$-X \leqq Y \leqq X$　……②

①かつ②より　$Y=X$, $Y=-X$　$(X \geqq 1)$

(ii)　$0 \leqq X \leqq 1$ のとき　$M(\mathrm{P})=\mathrm{PB}$　$m(\mathrm{P})=|Y|$

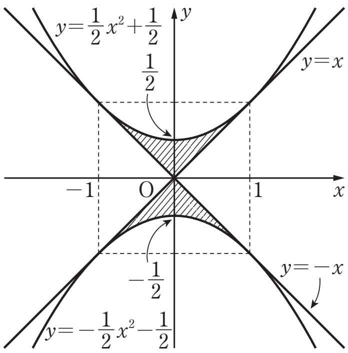
(ア)より　①

(イ)より　$Y^2 \leqq X^2+(Y-1)^2$　かつ　$Y^2 \leqq X^2+(Y+1)^2$　……③

①かつ③より　$-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2} \leqq Y \leqq -X$, $X \leqq Y \leqq \frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}$　$(0 \leqq X \leqq 1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

図形と設定の対称性より点Pの存在範囲は y 軸について対称である．
よって存在範囲 K は右図斜線部分
（境界および直線 $y=\pm x$ 上の点を含む）．



(2)　求める面積は　$4\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-x\right\}dx$

$$=4\int_0^1\frac{1}{2}(x-1)^2dx=2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

3　空間内に同一平面上にない4点A，B，C，Dがある．B，Dから直線ACに下ろした垂線の足をそれぞれH，Kとし，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{KD}}$ のなす角を θ $(0<\theta<\pi)$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ のなす角を α とすると $\mathrm{HD}\cos\alpha=\mathrm{KD}\cos\theta$ であることを証明せよ．

(2)　∠ABC，∠ADCがともに直角で，AB＝CD＝a，BC＝DA＝b であるとき，線分BDの長さを a，b，θ で表せ．

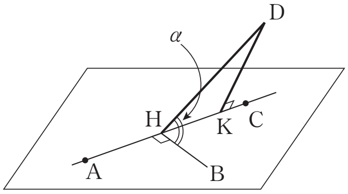
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KD}}=\mathrm{HB}\times\mathrm{KD}\times\cos\theta$　……①　　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\mathrm{HB}\times\mathrm{HD}\times\cos\alpha$　……②

ここで，HB⊥ACより　HB⊥KH

よって　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KH}}=0$　　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DH}}-\overrightarrow{\mathrm{DK}})=0$

$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{KD}}-\overrightarrow{\mathrm{HD}})=0$

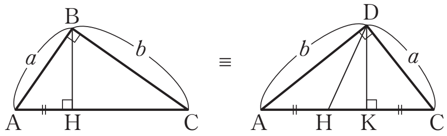
つまり　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KD}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HD}}$　……③



①，②，③より　$\mathrm{HB}\times\mathrm{HD}\times\cos\alpha=\mathrm{HB}\times\mathrm{KD}\times\cos\theta$

ゆえに　$\mathrm{HD}\times\cos\alpha=\mathrm{KD}\times\cos\theta$

(2)　△ABH∽△ACBより



$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\times\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\times\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

△ADC≡△CAB　および　△CDK≡△ABHより

KD＝BH，CK＝AH

$$\mathrm{DH}^2=\mathrm{DK}^2+\mathrm{HK}^2=\mathrm{BH}^2+(\mathrm{AC}-2\mathrm{AH})^2$$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\left(\sqrt{a^2+b^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}=\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}$$

よって，△BDHで余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{DH}^2-2\mathrm{BH}\times\mathrm{HD}\times\cos\alpha=\mathrm{BH}^2+\mathrm{DH}^2-2\mathrm{BH}\times\mathrm{KD}\cos\theta$$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}-2\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\cos\theta=\frac{a^4-2a^2b^2\cos\theta+b^4}{a^2+b^2}$$

ゆえに　$\mathbf{BD}=\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{a^4-2a^2b^2\cos\theta+b^4}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題(2)

1 (1) 1 から n までの自然数の総和が偶数になるのは n がどのような数の場合か.

(2) 1 から n までの自然数の総和が偶数であるとき，1 から n までの自然数を 2 つの組に分けてそれぞれの組に属する数の総和が等しくなるようにできることを証明せよ.

(1) 1 から n までの自然数の総和は　$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

n，$(n+1)$ は隣接 2 整数よりいずれかは偶数である．以下 k を自然数とする.

$n=2k$ のとき　$S=\dfrac{2k(2k+1)}{2}=k(2k+1)$

$2k+1$ は奇数より k が偶数のとき S は偶数となる．このとき n は 4 の倍数である.

$n+1=2k$ のとき　$S=\dfrac{(2k-1)\cdot 2k}{2}=k(2k-1)$

$2k-1$ は奇数より k が偶数のとき S は偶数となる.

このとき　$n=2(2l)-1=4l-1$（l は整数）と表される．よって n は 4 で割ると 3 余る数．したがって，S が偶数となるのは　n が **4 の倍数**，または **4 で割ると 3 余る数**である.

(2) 2 つの組のそれぞれの総和が $\dfrac{S}{2}=\dfrac{n(n+1)}{4}$ となるように分けることができることを示す．S が偶数のとき，(1)より $n=4m$，$4m-1$（m は自然数）と表すことができる.

$n=4m$ のとき　$\dfrac{S}{2}=\dfrac{4m(4m+1)}{4}=m(4m+1)$

一例として　1，2，3，……，$m-1$，m，$3m+1$，$3m+2$，……，$4m-2$，$4m-1$，$4m$

を一方の組にすれば題意を満たす.

$n=4m-1$ のとき　$\dfrac{S}{2}=\dfrac{(4m-1)\cdot 4m}{4}=m(4m-1)$

一例として　1，3，5，……，$2m-3$，$2m-1$，$2m$，$2m+2$，……，$4m-6$，$4m-4$，$4m-2$

を一方の組にすれば題意を満たす.

ゆえに，題意のように分けることができることが示された.

2 n 枚のカードがあり，1 枚目のカードに 1，2 枚目のカードに 2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し，もう一度無作為に 1 枚を取り出す．取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x，y とする．また，k を n の約数とする.

(1) $x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ.

(2) さらに，$k=pq$ とする．ただし，p，q は異なる素数である．xy が k の倍数となる確率を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$n=mk$（m は整数）とおくと

1から n までの中に k の倍数は m 個あり，

同様に k で割ると r 余る数（$1\leqq r\leqq k-1$）も m 個ずつある．

$x+y$ が k の倍数となるのは以下

（i）　x，y がともに k の倍数（1通り）

（ii）　x を k で割った余りが r（$1\leqq r\leqq k-1$），y を k で割った余りが $k-r$（$k-1$ 通り）

（i），（ii）いずれの場合も x，y はそれぞれ m 通りあり，（i），（ii）合わせて事象は k 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{k\cdot m^2}{n^2}=\dfrac{km^2}{m^2k^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{k}}$

(2)　$n=mk=mpq$ とおく．xy が k すなわち pq の倍数となるときを考える．

1から n までの中で

p の倍数となるものは mq 個

q の倍数となるものは mp 個

pq の倍数となるもの　……①　は m 個

p の倍数であるが q の倍数でないもの　……②　は $mq-m=m(q-1)$（個）

q の倍数であるが p の倍数でないもの　……③　は $mp-m=m(p-1)$（個）

p の倍数でも q の倍数でもないもの　……④　は $mpq-(mq+mp-m)$

$=m(p-1)(q-1)$（個）

x が①のとき y は任意

x が②のとき y は q の倍数

x が③のとき y は p の倍数

x が④のとき y は pq の倍数　である．

よって，求める確率は

$$\frac{1}{n^2}\{m\cdot mpq+m(q-1)\cdot mp+m(p-1)\cdot mq+m(p-1)(q-1)\cdot m\}$$

$$=\frac{m^2(4pq-2p-2q+1)}{m^2p^2q^2}=\boldsymbol{\frac{(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2}}$$

3　n を正の整数とする．

（1）　$x^2+y<n^2$ を満たす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 a_n を求めよ．

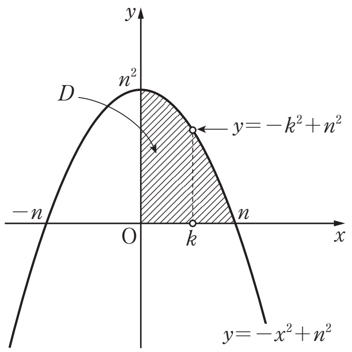
（2）　$\sqrt{x^2+y}$ を超えない最大の整数が n であるような正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 b_n を求めよ．

---

(1)　右図領域 D（斜線部．境界含まない）に属する格子点の個数が求める a_n である．

$n\geqq 2$ のとき，直線 $x=k$ 上（$k=1$，2，……，$n-1$）にある格子点の個数は $(-k^2+n^2-1)$ 個である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



ゆえに　$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\{-k^2+(n^2-1)\}$

$$=-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+(n^2-1)\cdot(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6)\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき D は格子点を含まないので $a_1=0$ であり，

$n=1$ のときも①は成り立つ.

よって　$\boldsymbol{a_1=\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6)}$（個）

(2)　題意より $n\leqq\sqrt{x^2+y}<n+1$ を満たす，つまり $n^2\leqq x^2+y<(n+1)^2$ を満たす第 1 象限の格子点の個数を求める.

それは同象限内の格子点のうち $x^2+y<(n+1)^2$ を満たすものから $x^2+y<n^2$ を満たすものを除いたものの個数である.

ゆえに

$$b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{1}{6}n\{4(n+1)^2+(n+1)-6\}-\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6)=2n^2+n-1$$

$$=\boldsymbol{(n+1)(2n-1)}\text{（個）}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

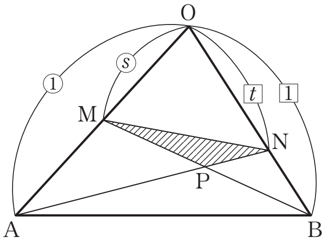
練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　面積が1である△OABの辺OA上に点M，辺OB上に点Nをとり，線分ANと線分BMの交点をPとして△PMNの面積について考える．△OMNの面積が$\frac{1}{3}$のとき，$s=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}$として，以下の問いに答えよ．

(1)　△PMNの面積を求めよ．

(2)　△OMNの面積が$\frac{1}{3}$という条件を満たしながら，M，Nが動くとき，△PMNの面積が最大になるときのsの値を求めよ．



$s=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}$ より　$\mathrm{OM}=s\mathrm{OA}$　つまり　$\mathrm{OM}:\mathrm{OA}=s:1$

また，$t=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}}$ とおく　と　$\mathrm{ON}=t\mathrm{OB}$　← **不足している文字を適切に設定しよう．**

つまり　$\mathrm{ON}:\mathrm{OB}=t:1$

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}s\mathrm{OA}\cdot t\mathrm{OB}\cdot\sin\theta$$
$$=st\cdot\triangle\mathrm{OAB}=st$$

よって　$st=\frac{1}{3}$　　ゆえに　$t=\frac{1}{3s}$

(1)　メネラウスの定理より　$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BN}}\cdot\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MO}}=1$　つまり　$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{1-s}{s}=1$

よって　$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PA}}=\frac{(1-t)s}{1-s}=\frac{s-\frac{1}{3}}{1-s}=\frac{3s-1}{3(1-s)}$

ベクトルを利用してもよいが，文字が多岐にわたり若干煩雑となる．

ゆえに　$\triangle\mathrm{PMN}=\triangle\mathrm{AMN}\times\frac{3s-1}{3(1-s)+3s-1}=(1-s)\cdot\triangle\mathrm{OAN}\times\frac{3s-1}{2}$

$$=(1-s)\cdot t\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\frac{3s-1}{2}=\frac{1}{2}(3s-1)\left(t-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-s-t+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t=\boldsymbol{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}s-\frac{1}{6s}}$$

(2)　$s>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均)　から　← **最大・最小問題の選択肢の1つである**

$s+\frac{1}{3s}\geqq2\sqrt{s\cdot\frac{1}{3s}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$　等号成立は　$s=\frac{1}{3s}$　つまり　$s=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のときである．

よって　$\triangle\mathrm{PMN}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{3s}\right)\leqq\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$　より

△PMNは　$s=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ のとき，最大値　$\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$　をとる．

※ 【　　】 **は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] 座標平面の x 軸上に点 A(15, 0) があり，y 軸上の $y>0$ の部分に点 B がある．原点 O と直線 AB との距離，および線分 OB の長さはともに整数である．点 B の座標を求めよ．

点 B の座標を $(0,\ b)$ とおくと，b は正の整数である．

直線 AB の方程式は $\dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{b}=1$　すなわち　$bx+15y-15b=0$　である．

原点 O と直線 AB の距離を h とすると

$$h=\frac{|-15b|}{\sqrt{b^2+15^2}}=\frac{15b}{\sqrt{b^2+15^2}}$$

h は整数より b^2+15^2 が平方数であることが必要.

「必要条件」で攻めることがときには効果的である.

よって　$b^2+15^2=n^2$（n は正の整数）とおく．

$$n^2-b^2=15^2 \quad \text{つまり} \quad (n+b)(n-b)=3^2\cdot5^2$$

積の形を作る.

$n+b>n-b$ より，これを満たす整数 $(n+b,\ n-b)$ の組は

$(n+b,\ n-b)=(225,\ 1),\ (75,\ 3),\ (45,\ 5),\ (25,\ 9)$ のみ.

よって　$(n,\ b)=(113,\ 112),\ (39,\ 36),\ (25,\ 20),\ (17,\ 8)$

このうち　$h=\dfrac{15b}{n}$　が整数となるのは　$n=25$，$b=20$ のときのみ.

ゆえに　B**(0, 20)**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[1] 原点を中心とする半径１の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする．A$(a,\ 0)$ と N$(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく．また，B$(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく．

(1) P の座標を a で表せ．

(2) AQ∥PB のとき，AN･BN＝2 となることを示せ．

(1) 直線 AN の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{1}=1$　　つまり　$x=-ay+a$ である．

これと円 C：$x^2+y^2=1$ との交点の y 座標は　$(-ay+a)^2+y^2=1$

つまり　$(a^2+1)y^2-2a^2y+a^2-1=0$ の異なる２解．

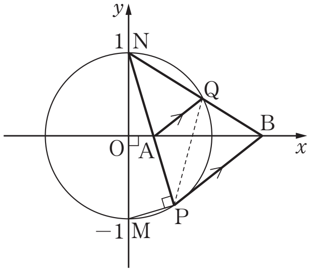
そのうち１解が１である．もう１解を α とすると，

解と係数の関係から　$1\cdot\alpha=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$　　よって　$\alpha=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

このとき　$x=-a\cdot\dfrac{a^2-1}{a^2+1}+a=\dfrac{2a}{a^2+1}$　ゆえに　$\mathbf{P\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)}$

(2) M$(0,\ -1)$ とすると，△OAN∽△PMN より　AN：ON＝MN：PN

よって　AN･PN＝ON･MN＝1･2＝2　……①



①の式は比較的容易に出る．よって目的は PN＝BN，つまり ∠APB＝∠NBP を示すこととなり，図形の検証に入ることができる．

ここで四角形 OAPM は円に内接することより

∠NMP＝∠PAB

また，四角形 NQPM もまた円 C に内接することより

∠NMP＝∠PQB

よって，∠PAB＝∠PQB より四角形 PAQB は円に内接する．

したがって，∠APB＝∠NQA であり，また AQ∥PB より，∠NBP＝∠NQA

よって，∠APB＝∠NBP であるから，△NPB は二等辺三角形である．

ゆえに，PN＝BN より，①から　AN･BN＝2

(1)と同様に Q の座標を求めて解答を進めることもできる．
その場合，「垂直」「平行」を扱う際には「ベクトル」も視野に入れて解答を進めるとよい．
ただし，ベクトルを用いる，用いないにかかわらず計算は煩雑になりやすい．図形，特に「円の性質」により長さや角度を扱う「平面図形」の知識を蓄えておこう．
大切なのは「目的意識」である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

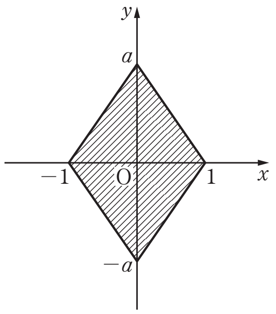
2 a は正の定数とする．点 $(x,\ y)$ は条件

$$a|x|+|y|\leqq a$$

を満たす．

(1) $y-(x+1)^2$ の最小値を求めよ．

(2) $y-(x+1)^2$ の最大値を求めよ．



$a|x|+|y|\leqq a$ は x 軸，y 軸に関して対称な図形であるから，
これを満たす点 $(x,\ y)$ の領域は右図斜線部分（境界含む）．
また，$y-(x+1)^2=k$ とおくと　$y=(x+1)^2+k$
よって，この放物線 C（軸：$x=-1$）が右図の領域と共有点を
もつときの頂点の y 座標 k について考える．

(1) k が最小になるのは放物線 C が $(1,\ 0)$ または $(0,\ -a)$ の
いずれかを通るときである．

$(1,\ 0)$ を通るとき　$k=-4$　　$(0,\ -a)$ を通るとき　$k=-a-1$

$-4<-1-a$　となるのは　$a<3$ のとき

ゆえに　**$0<a<3$ のとき　最小値 -4　　$a\geqq 3$ のとき　最小値 $-a-1$**

(2) k が最大となるのは放物線 C が点 $(0,\ a)$ を通るとき，または，第2象限で領域の境界と接するときである．

$(0,\ a)$ を通るとき　$k=a-1$

また，接するときは　C と $y=ax+a$ より y を消去して x について整理した式

$x^2-(a-2)x+k-a+1=0$　が重解をもつときである．

よって　$(a-2)^2-4(k-a+1)=0$　　$k=\dfrac{a^2}{4}$

このとき，方程式は重解 $x=\dfrac{a-2}{2}$ をもつ．これが第2象限内にあるのは

$-1<\dfrac{a-2}{2}<0$　つまり　$0<a<2$ のときであり，$\dfrac{a^2}{4}$ はこのときのみ最大値の候補となる．

$a-1<\dfrac{a^2}{4}$ とすると　$a^2-4a+4>0$　　$(a-2)^2>0$　これは $a=2$ 以外のすべての a で成り立つ．

ゆえに　**$0<a<2$ のとき　最大値 $\dfrac{a^2}{4}$　　$a\geqq 2$ のとき　最大値 $a-1$**

講義で扱った通り，図形が描けないときはもちろん，描けるときでも状態が不明瞭な場合は確実に「検証」が必要となる．とくに境界線と「接する」ときには，境界線の存在範囲の中に接点が入っているかどうかをきっちりと確かめること．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 単位円周上に点Pと点Qがある．線分OPがx軸の正の向きとなす角をθとし，線分OQがx軸の正の向きとなす角を3θとする．ただし，点Qは第3象限または第4象限にあるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分PQの中点をMとする．Mの座標をθを用いて表せ．

(2) Mのx座標の最大値および最小値を求めよ．

(1) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ と表すことができる．

よって　$\mathrm{M}\left(\dfrac{\cos\theta+\cos 3\theta}{2},\ \dfrac{\sin\theta+\sin 3\theta}{2}\right)=\left(\dfrac{4\cos^3\theta-2\cos\theta}{2},\ \dfrac{4\sin\theta-4\sin^3\theta}{2}\right)$

$$=\boldsymbol{(2\cos^3\theta-\cos\theta,\ 2\sin\theta-2\sin^3\theta)}$$

(2) 点Qが第3象限または第4象限にあることより　$\pi<3\theta<2\pi$　つまり　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\cos\theta=t$ とおくと　$-\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{1}{2}$

このときMのx座標は　$2t^3-t$　　これを$f(t)$とおくと　$f'(t)=6t^2-1$

$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき　$f'(t)=0$ となる．

よって，$f(t)$ の増減は右表．

ゆえに，最大値　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{9}}$　最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{6}}{9}}$

t	$-\frac{1}{2}$	…	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	…	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	…	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗	$-\frac{1}{4}$

講義でふれた「３次関数のグラフの性質」により，本来は端点の値を調べずとも極値が最大・最小となることはわかる．わかった上で，表を作成しながら「確かめる」ことが必要である（センター試験ではそのプロセスはとばす，ということである）．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ に関する以下の各問いに答えよ．

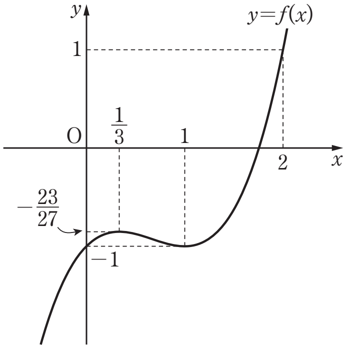
(1) $f(a)=0$，$1<a<2$ を満たす実数 a が1つだけ存在することを示せ．

(2) (1)の a について，3次関数 $g(x)=x^3+bx^2+cx+d$ が $g\left(-\dfrac{1}{a}\right)=0$ を満たすように，b，c，d の値を定めよ．

(1) $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ より $f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

増減表とグラフは以下のようになる．

x	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↗	$-\dfrac{23}{27}$	↘	-1	↗	1	



したがって，$f(a)=0$，$1<a<2$ を満たす実数 a が1つだけ存在する．

(2) (1)の a について，$f(a)=0$ すなわち $a^3-2a^2+a-1=0$

$a\neq0$ より，この式の両辺を a^3 で割って

$$1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}=0 \quad すなわち \quad \left(-\frac{1}{a}\right)^3+\left(-\frac{1}{a}\right)^2+2\left(-\frac{1}{a}\right)+1=0$$

よって，$x=-\dfrac{1}{a}$ を解にもつ x^3 の係数が1の3次方程式の1つとして

$x^3+x^2+2x+1=0$ があげられる．

これと $g(x)=0$ つまり $x^3+bx^2+cx+d=0$ を係数比較して $\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=2}$，$\boldsymbol{d=1}$

3次方程式の実数解は少なくとも1つ存在するのであるが，それを計算により導くことが困難である場合も少なくない．それを題材にした問題もやはり少なくない．(2)では未定係数が3つあるためどうしたものかと悩んだ人もいるであろう．「(1)の a について」という文章から $a^3-2a^2+a-1=0$ の式が作れたのであればこの式をどのように利用するかをじっくり考えたであろう．いかがか？

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　xy 平面上に直線 $l：y=x+2$ と曲線 $C：y=1-x^2$ がある．直線 l 上を動く点Ｐから曲線 C に異なる２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．線分QRの中点をＭとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　点Ｐの x 座標を t とし，２点Ｑ，Ｒの x 座標をそれぞれ α，β とするとき，$\alpha+\beta=2t$ および $\alpha\beta=-(t+1)$ を示せ．

(2)　点Ｍの軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$C：y=-x^2+1$ より　$y'=-2x$

$x=s$ におけるこの式の接線の方程式は　$y=-2s(x-s)-s^2+1$

すなわち　$y=-2sx+s^2+1$

これが l 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t+2)$ を通るとき　$t+2=-2st+s^2+1$

つまり　$s^2-2ts-(t+1)=0$　この方程式の異なる２解が点Ｑ，Ｒの x 座標 α，β である．

よって，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2t$，$\alpha\beta=-(t+1)$　である．

【別解】　$x=\alpha$，$x=\beta$ における C の接線の方程式はそれぞれ

$y=-2\alpha x+\alpha^2+1$，$y=-2\beta x+\beta^2+1$

これらがともに点 $\mathrm{P}(t,\ t+2)$ を通るとき

$t+2=-2\alpha t+\alpha^2+1$，$t+2=-2\beta t+\beta^2+1$

つまり　$\alpha^2-2t\alpha-(t+1)=0$　かつ　$\beta^2-2t\beta-(t+1)=0$　である．

これらは　α，β が２次方程式　$s^2-2ts-(t+1)=0$　の２解であることを示す．

よって，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2t$，$\alpha\beta=-(t+1)$　である．

> **【別解】**の考え方は円の「極線」を作るときによく用いられる解答である．

(2)　$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=t$$

$$Y=\frac{(1-\alpha^2)+(1-\beta^2)}{2}=-\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1=-\frac{1}{2}(4t^2+2t+2)+1=-2t^2-t$$

よって　$Y=-2X^2-X$　より　Ｍの軌跡は放物線　$y=-2x^2-x=-x(2x+1)$

これと x 軸によって囲まれる部分の面積は

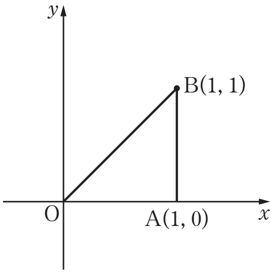
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-x(2x+1)dx=\frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

← $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 動点 $Q(u,\ v)$，$P(x,\ y)$ の座標の間に $x=u+v$，$y=u^2+v^2$ という関係がある．点Q が $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を３頂点とする三角形の周上を動くとき，点Pが描く軌跡を図示せよ．また，その図形で囲まれた部分の面積を求めよ．

$O(0,\ 0)$，$A(1,\ 0)$，$B(1,\ 1)$ とする．



点QがOA上を動くとき

$0 \leqq u \leqq 1$，$v=0$

よって　$x=u$，$y=u^2$　より

$y=x^2$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

点QがAB上を動くとき

$u=1$，$0 \leqq v \leqq 1$

よって　$x=1+v$，$y=1+v^2$　より

$y=(x-1)^2+1$　$(1 \leqq x \leqq 2)$

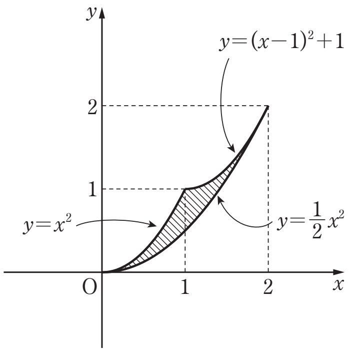
点QがBO上を動くとき

$v=u$，$0 \leqq u \leqq 1$

よって　$x=2u$，$y=2u^2$　より

$y=\dfrac{1}{2}x^2$　$(0 \leqq x \leqq 2)$

以上より，$P(x,\ y)$ の動く軌跡は右図実線部分.



これにより囲まれた部分の面積は

$$\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\{(x-1)^2+1\}dx-\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{(x-1)^3}{3}+x\right]_1^2-\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2-1-\frac{4}{3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

動くときの状態の場合分けは問題なかったであろう．
面積の立式だが，ポイントは２つ．
①境界の下側は常に $y=\dfrac{1}{2}x^2$ であるから，後からまとめて引く．
②平方完成されている式をそのまま利用して積分（軸が端点になっている）
今回はこれを利用しなくても時間的な差はみられないが，どのように∫すると計算の速度と正確性が上がるのかはさまざまな問題を通じて学ぶことが必要である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一橋大数学ＩＡⅡＢ　　第５講　ベクトル　練習問題　解答

1　三角形 ABC の辺の長さをそれぞれ AB＝6，BC＝$2\sqrt{13}$，CA＝8 とする．

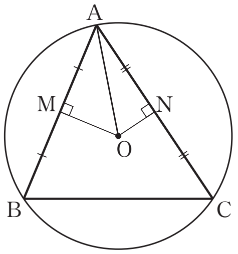
(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2)　三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{AO}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$ と表すとき，l，m の値を求めよ．

(1)　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}=\dfrac{36+64-52}{2}=\mathbf{24}$

内積を求める有用な一手段である



(2)　AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　$(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-l\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2-l|\overrightarrow{AB}|^2-m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　　よって　$6l+4m=3$　……①

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　　$(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-l\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-l\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-m|\overrightarrow{AC}|^2=0$　　よって　$3l+8m=4$　……②

①，②より　$\boldsymbol{l=\dfrac{2}{9}}$，$\boldsymbol{m=\dfrac{5}{12}}$

【別解】

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle OAB=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$

よって　$(l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$　より　$6l+4m=3$　……①

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle OAC=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AN}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$

よって　$(l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$　より　$3l+8m=4$　……②

①，②より　$\boldsymbol{l=\dfrac{2}{9}}$，$\boldsymbol{m=\dfrac{5}{12}}$

【別解】の考え方は「正射影ベクトル」を用いたもの．
直交＝内積が 0 と合わせて覚えておきたい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　空間に 2 点 $A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{2},\ 0)$ がある．z 軸上に点 $P(0,\ 0,\ p)$ $(p>0)$ があり，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角は 45° である．

(1)　p の値を求めよ．

(2)　3 点 A，B，P を通る平面 α に関して，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ と対称な点の座標を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},\ 0,\ -p)$，$\overrightarrow{PB}=(0,\ \sqrt{2},\ -p)$

$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{p^2+3}$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{p^2+2}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=p^2$ より

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos 45^\circ$　つまり　$p^2=\sqrt{p^2+3}\times\sqrt{p^2+2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

成分表示されているときの内積の流れをしっかりつかんでおこう．

$2p^4=p^4+5p^2+6$　　$p^4-5p^2-6=0$

$(p^2+1)(p^2-6)=0$　　$p^2=6$　　$p>0$ より　$\boldsymbol{p=\sqrt{6}}$

(2)　(1)より $P(0,\ 0,\ \sqrt{6})$，$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},\ 0,\ -\sqrt{6})$，$\overrightarrow{PB}=(0,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{6})$

$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{6+3}=3$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=6$

平面 α に関して O と対称な点を O′ とする．

線分 OO′ の中点を M とすると，M は平面 α 上より　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB}$

また，OM⊥平面 α より　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PA}=0$　かつ　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PA}=-6$　であるから

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PA}=0$　より　$(\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PA}=0$　　つまり　$-6+9s+6t=0$　……①

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PB}=-6$　であるから

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PB}=0$　より　$(\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PB}=0$　　つまり　$-6+6s+8t=0$　……②

①，②より　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB}$

$$=(0,\ 0,\ \sqrt{6})+\frac{1}{3}(\sqrt{3},\ 0,\ -\sqrt{6})+\frac{1}{2}(0,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{6})=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{OO'}=2\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

ゆえに，求める座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)}$

ベクトルを利用した「対称移動」．平面・空間にかかわらず，対称点の中点が「対称の軸」の上にあることを利用する．今回のように平面に関しての対称移動の場合は，対称の軸は「平面上の点」．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 等差数列 1，3，5，7，…… を次の(1)または(2)の規則にしたがってそれぞれ初項から順にグループ分けする．それぞれのグループ分けについて，k 番目のグループに含まれる項の和を求めよ．

(1) k 番目のグループに $2k$ 個の項を含める．

(2) k 番目のグループの最初の項が n のとき，k 番目のグループに n 個の項を含める．

(1) 1，3 | 5，7，9，11 | 13，15，17，19，21，23 | 25，……

k 番目のグループの末項はもとの数列の第 $(2+4+6+\cdots\cdots+2k)=\dfrac{k(2+2k)}{2}=(k^2+k)$ 項

k 番目のグループの初項はもとの数列の第 $\{(k-1)^2+(k-1)+1\}=(k^2-k+1)$ 項

よって k 番目のグループは

初項　$2(k^2-k+1)-1=2k^2-2k+1$　　末項　$2(k^2+k)-1=2k^2+2k-1$

項数 $2k$ の等差数列の和である．

ゆえに，求める和は

$$\frac{2k}{2}\{(2k^2-2k+1)+(2k^2+2k-1)\}=\boldsymbol{4k^3}$$

(2) 1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17，19，21，23，25 | 27，29，……

k 番目のグループの初項および項数を 3^{k-1} と仮定すると

各グループの項は等差数列であることより

$(k+1)$ 番目の初項は　$3^{k-1}+3^{k-1}\cdot 2=3^k$ となり，$k=1$ のときも成り立っているので，この仮定は正しい．

よって k 番目のグループは

初項 3^{k-1}　末項 3^k-2　項数 3^{k-1}　の等差数列の和である．

ゆえに，求める和は

$$\frac{3^{k-1}}{2}(3^{k-1}+3^k-2)=\frac{3^{k-1}}{2}(3^{k-1}+3\cdot 3^{k-1}-2)=\boldsymbol{3^{k-1}(2\cdot 3^{k-1}-1)}$$

> 群数列の基本は講義でもふれたように「各群の末項が元の数列の第何項にあたるか」が鍵である．ただし，必ずしもその解法ばかりとは限らない．(2)のように予想をつけて数学的帰納法で示す誘導は，センター試験でも出題されたことがある．あくまで「予想」にすぎないのできっちりと示すこと．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\boxed{2}$ 自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2) $a_n{}^2-2b_n{}^2$ を求めよ．

(3) (2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を１つ求めよ．

$n=1$ のとき　$3+2\sqrt{2}=a_1+b_1\sqrt{2}$　　a_1，b_1 は自然数すなわち有理数より　$a_1=3$，$b_1=2$

(1) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n+b_n\sqrt{2}&=(3+2\sqrt{2})^n=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}\\&=(3+2\sqrt{2})(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{2})\\&=(3a_{n-1}+4b_{n-1})+(2a_{n-1}+3b_{n-1})\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって $\begin{cases}\boldsymbol{a_n=3a_{n-1}+4b_{n-1}}\\\boldsymbol{b_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}}\end{cases}$

(2) $a_n{}^2-2b_n{}^2=(3a_{n-1}+4b_{n-1})^2-2(2a_{n-1}+3b_{n-1})^2=a_{n-1}{}^2-2b_{n-1}{}^2$

よって　$a_n{}^2-2b_n{}^2=a_1{}^2-2b_1{}^2=\boldsymbol{1}$

(3) $a_n{}^2-2b_n{}^2=1$　　$(a_n+\sqrt{2}\,b_n)(a_n-\sqrt{2}\,b_n)=1$

$$a_n-\sqrt{2}\,b_n=\frac{1}{a_n+\sqrt{2}\,b_n}$$

よって　$\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{b_n(a_n+\sqrt{2}\,b_n)}$

ここで，$2>1.96$ より　$\sqrt{2}>1.4$

(1)より　$a_2=17$，　$b_2=12$

$$b_2(a_2+\sqrt{2}\,b_2)>12(17+1.4\times 12)=405.6$$

よって　$\dfrac{a_2}{b_2}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{405.6}$

$a_3=99$，　$b_3=70$

$$b_3(a_3+\sqrt{2}\,b_3)>70(99+1.4\times 70)=13790$$

よって　$\dfrac{a_3}{b_3}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{13790}<\dfrac{1}{10000}$

よって，求める有理数の１つは

$$\frac{a_3}{b_3}=\boldsymbol{\frac{99}{70}}$$

> 途中までの流れは講義問題と同様である．
> (3)は表現こそ異なるが背景は講義問題と同様．
> ただし「近似計算」により「下げる」必要がある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　n は2以上の自然数とする．袋の中に1から n までの数が1つずつ書かれた n 個の玉が入っている．この袋から無作為に玉を1個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す．この試行をA，B，Cの3人が順に行い，3人の中で最大の得点の人を勝者とする．例えば，A，B，Cの得点がそれぞれ4，2，4のときはAとCの2人が勝者であり，3人とも同じ得点のときはA，B，Cの3人とも勝者である．勝者が k 人（$k=1, 2, 3$）である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　勝者が3人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ．

(2)　$n=3$ の場合に勝者が2人である確率 $P_3(2)$ を求めよ．

(3)　勝者が1人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ．

(1)　勝者が3人となるのは3人とも同じ数を取り出したとき．

よって　$P_n(3)=\dfrac{n}{n^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{n^2}}$

(2)　勝者が2人となるとき，場には2種類の数が出ている．その数の選び方が ${}_3C_2$ 通り．そのうち大きい方の数を出したのが2人．その2人の選び方が ${}_3C_2$ 通り．

よって　$P_3(2)=\dfrac{3\times3}{3^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(3)　勝者が1人となるのは以下の場合である．

(i)　場に3種類の数が出ている

(ii)　場に2種類の数が出ていて，大きい方の数を出したのが1人のみ．

(i)のとき

3種類の数の選び方が ${}_nC_3$ 通り，その3つの数を誰が出したのかで3! 通り

(ii)のとき

2種類の数の選び方が ${}_nC_2$ 通り，そのうち大きい方の数を出した1人の選び方が ${}_3C_1$ 通り

よって　$P_n(1)=\dfrac{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2}\times6+\dfrac{n(n-1)}{2}\times3}{n^3}=\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}}$

【別解】　勝者が1人となるとき，その数を k $(2\leqq k\leqq n)$ とすると，残り2人の出した数字は $k-1$ 以下．また，勝者が誰かの選び方が ${}_3C_1$ 通り．

したがって，その確率は　$\dfrac{3(k-1)^2}{n^3}$

よって　$P_n(1)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{3(k-1)^2}{n^3}$　←「固定」して「動かす」

$=\dfrac{3}{n^3}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2=\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2$

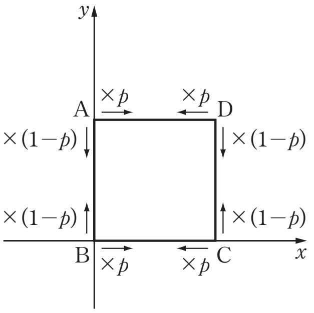
$=\dfrac{3}{n^3}\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}}$

【別解】の考え方は「出た数字」に注目した．今回の問題設定では，出した数が何であるかは決める必要がない．問われてない＝決める必要がない，となるか否かの判断ができるようにしておきたい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標平面上に4点A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x軸と平行な方向の移動について確率p，y軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれa_n，c_nとする．

(1) a_2，c_2，a_4，c_4を求めよ．　(2) a_{2n}を求めよ．



(1) 点QがAを出発し，2秒後にAにいるのは

A→B→A　または　A→D→A　と移動したとき．

よって　$a_2=(1-p)^2+p^2=\mathbf{2p^2-2p+1}$

点QがAを出発し，2秒後にCにいるのは

A→B→C　または　A→D→C　と移動したとき．

よって　$c_2=(1-p)p+p(1-p)=\mathbf{-2p^2+2p}(=1-a_2)$

点QがAを出発し，4秒後にAにいるのは，

2秒後にA，4秒後にA　(確率$a_2\times a_2$)

2秒後にC，4秒後にA　(確率$c_2\times\{(1-p)p+p(1-p)\}=c_2\times c_2$)　と移動したとき．

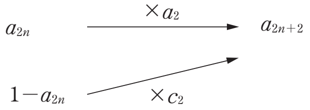
よって　$a_4=(a_2)^2+(c_2)^2=\mathbf{8p^4-16p^3+12p^2-4p+1}$

4秒後には点QはAまたはCにのみ存在する．

よって　$c_4=1-a_4=\mathbf{-8p^4+16p^3-12p^2+4p}$

(2) $a_{2n+2}=a_{2n}\times a_2+c_{2n}\times c_2$

$\qquad=a_{2n}\cdot(2p^2-2p+1)+(1-a_{2n})\cdot(-2p^2+2p)$



よって　$a_{2n+2}=(2p-1)^2a_{2n}-2p^2+2p$，　$a_0=1$

つまり　$a_{2n+2}-\frac{1}{2}=(2p-1)^2\left(a_{2n}-\frac{1}{2}\right)$，　$a_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

したがって　$a_{2n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\{(2p-1)^2\}^n$

ゆえに　$a_{2n}=\mathbf{\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}}$

確率漸化式である．前の状態に何が起これば次の状態になるかを漸化式で表し，それを解くことで確率を求める手法．今一度確認を．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

題意の総和は，初項 a，末項 b，項数 $b-a+1(>1)$　の等差数列の和

ゆえに　$\dfrac{(b-a+1)(a+b)}{2}=500$

$(a+b)(b-a+1)=2^3\times5^3$ ←―― 積の形

$(a+b)+(b-a+1)=2b+1$　これは奇数．
よって，$a+b$ と $b-a+1$ とは偶奇を異にする．
また　$(a+b)-(b-a+1)=2a-1>0$　より　$a+b>b-a+1$ ←―― 絞り込み
さらに　$a<b$　より　$b-a+1>0$

ゆえに　$(a+b,\ b-a+1)=(125,\ 8),\ (40,\ 25),\ (200,\ 5)$

したがって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(59,\ 66),\ (8,\ 32),\ (98,\ 102)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) すべての正の奇数 k は，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表されることを示せ．

(2) 正の偶数 k で，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表されるものをすべて求めよ．

(1) $1=1^2-0^2$　　$3=2^2-1^2$　　$5=3^2-2^2$　……

$m=n+1$ のとき（$m>n$ を満たす）

$$k=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$$

n は0以上の整数であることより，

$k=2n+1$ はすべての正の奇数を表す．

> ここでは「シミュレート」により $m=n+1$ を予測し，それが正しいことを計算だけで導いた．これは表される結果が明確であったことが大きい．そうでない場合は「数学的帰納法」が選択肢に入ることであろう．

ゆえに　$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によってすべての正の奇数 k は $k=m^2-n^2$ と表される．

(2) $2^2-0^2=4$　　$3^2-1^2=8$　　$4^2-2^2=12$　……

$$k=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$$

> $(m+n)+(m-n)=2m$　より　$m+n$ と $m-n$ は偶奇を共にする．
> よって k が偶数となるときは $m+n$，$m-n$ はともに偶数のときに限られ，
> このとき k は必ず4の倍数となる．

← 絞り込み

また，$m=n+2$ のとき

$$k=m^2-n^2=(n+2)^2-n^2=4(n+1)$$

n は0以上の整数であることより，$k=4(n+1)$ はすべての正の4の倍数を表す．

以上より，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表される正の偶数は，

正である4の倍数すべてであり，これに限られる．

> (1)と同様にシミュレートにより $m=n+2$ が予測でき，それにより正であるすべての4の倍数があげられる．しかし(2)では「すべて求めよ」とあるので，4の倍数「以外」にないかを検証しなければならない．それが今回の解答の前半部分である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **1**　$2 \leqq a < b < c \leqq N$ を満たすすべての整数 a，b，c について不等式
> $2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2$　が成り立つような正の整数 N のうち最大のものを求めよ．

$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2$　……①

$2 \leqq a < b < c \leqq N$ より，**b，c を $3 \leqq b < c \leqq N$ に固定する**　と

①すなわち　$a^2-2(b+c)a+b^2-2bc+c^2<0$　は a の２次不等式である．

$f(a)=a^2-2(b+c)a+b^2-2bc+c^2$　$(2 \leqq a \leqq b-1)$

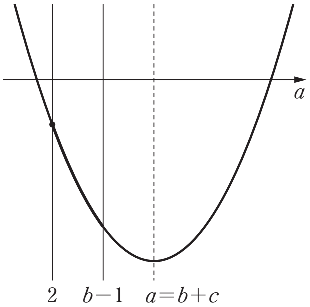
グラフの軸は　$a=b+c$

また　$b+c-(b-1)=c+1>0$ より　$b-1<b+c$

よって，$f(a)<0$ が $2 \leqq a \leqq b-1$ のすべての a で成り立つのは

$f(2)<0$ のときである．

よって　$b^2-2(c+2)b+c^2-4c+4<0$



ここで，**b を $3 \leqq b \leqq c-1$ で動かす**　と，この式は b の２次不等式である．

$g(b)=b^2-2(c+2)b+c^2-4c+4$　$(3 \leqq b \leqq c-1)$

グラフの軸は　$b=c+2$

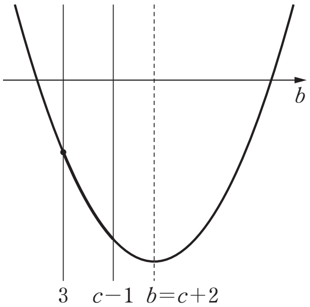
また　$c-1<c+2$

よって，$g(b)<0$ が $3 \leqq b \leqq c-1$ のすべての b で成り立つのは

$g(3)<0$ のときである．

よって　$c^2-10c+1<0$　より　$5-2\sqrt{6}<c<5+2\sqrt{6}$

c は整数より　$1 \leqq c \leqq 9$



ここで，**c を $4 \leqq c \leqq N$ で動かしたとき**

$c \leqq N$　ならば　$1 \leqq c \leqq 9$　が成り立つ整数 N のうち最大のものは $N=\mathbf{9}$ である．

> ２変数関数（３変数関数）に関しては「固定」→「動かす」という手法が時に効く．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 xy 平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形が囲む領域（境界を含む）を D とする．2 次関数 $f(x)=(x-a)^2+b$（a，b は定数）に対して，次の条件

「放物線 $y=f(x)$ と領域 D が共有点をもつ」

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a を固定したとき，上の条件が成立するような b の値の範囲を a で表せ．

(2) 上の条件を満たす点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

(1) a を固定したとき $y=f(x)$ のグラフは b の値により上下に動く．

よって，$y=f(x)$ のグラフが領域 D と共有点をもつときのグラフの上限と下限の状態およびそのときの $b=-(x-a)^2+y$ の値を考える．

(i) $1\leqq a$ のとき

グラフが点 $(1,\ 1)$ を通るときが上限で，このとき　$b=-(a-1)^2+1$

点 $(-1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a+1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a+1)^2-1\leqq b\leqq -(a-1)^2+1$

(ii) $0\leqq a<1$ のとき

グラフの頂点が $y=1$ 上にあるときが上限で，このとき　$b=1$

グラフが点 $(-1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a+1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a+1)^2-1\leqq b\leqq 1$

(iii) $-1\leqq a<0$ のとき

グラフの頂点が $y=1$ 上にあるときが上限で，このとき　$b=1$

グラフが点 $(1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a-1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a-1)^2-1\leqq b\leqq 1$

(iv) $a<-1$ のとき

グラフが点 $(-1,\ 1)$ を通るときが上限で，このとき　$b=-(a+1)^2+1$

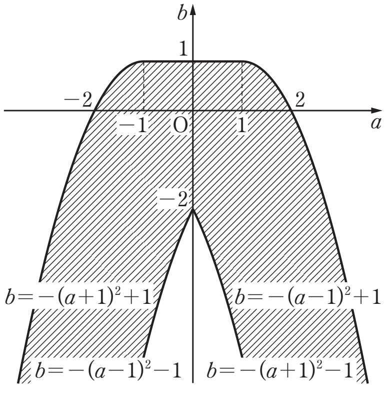
点 $(1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a-1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a-1)^2-1\leqq b\leqq -(a+1)^2+1$

以上より，求める b の値の範囲は

$$\boldsymbol{-(a-1)^2-1\leqq b\leqq -(a+1)^2+1\quad (a<-1)}$$
$$\boldsymbol{-(a-1)^2-1\leqq b\leqq 1\quad (-1\leqq a<0)}$$
$$\boldsymbol{-(a+1)^2-1\leqq b\leqq 1\quad (0\leqq a<1)}$$
$$\boldsymbol{-(a+1)^2-1\leqq b\leqq -(a-1)^2+1\quad (1\leqq a)}$$

(2) 求める領域は右図斜線部分（境界含む）．



図形と設定の対称性より，a を動かしたとき

(iii) $-1\leqq a<0$ のときは(ii)のグラフを

(iv) $a<-1$ のときは(i)のグラフを

それぞれ $a=0$ に関して対称に移動したものとなる．ただし(1)では「a を固定」して考えているため，この表現を使うことはできない．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　直角三角形の3辺の長さがすべて整数のとき，面積は2の整数倍であることを示せ.

直角三角形の斜辺の長さを c，他の2辺の長さを a，b とすると，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ.

ここで a，b がともに偶数とすると明らかにこの三角形の面積 $\frac{1}{2}ab$ は2の整数倍である.

ところでこのとき a^2+b^2 も偶数，すなわち c^2 も偶数となり，c が整数のときは c も偶数となる．よって a，b，c はすべて2の倍数となり，2で割り切れる．ちなみにこのような3辺の一例として

$a=6$，$b=8$，$c=10$ があげられる.

よって，a，b の少なくとも一方は奇数であるときを考える.

ここで，ある自然数 n を4で割った余りを考えることにより

①$n=4m$　②$n=4m+1$　③$n=4m+2$　④$n=4m+3$　に分類され，①と③は偶数，②と④は奇数である.

①のとき $(4m)^2=16m^2=8(2m^2)$　　②のとき $(4m+1)^2=8(2m^2+m)+1$

③のとき $(4m+2)^2=8(2m^2+2m)+4$　　④のとき $(4m+3)^2=8(2m^2+3m+1)+1$

より，n^2 を8で割った余りは0（①），1（②か④），4（③）となる.

a，b がともに4の倍数でないと仮定すると，少なくとも一方は奇数であることより

(i)　a，b のうち一方が②か④，一方が③

(ii)　a，b ともに②か④

となる.

このとき a^2+b^2 を8で割った余りは(i)のときは5，(ii)のときは2となる.

一方，c^2 を8で割った余りは0，1，4のいずれかであり，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する.

よって a，b のうち一方は4の倍数である.

このとき，この三角形の面積 $\frac{1}{2}ab$ は2の整数倍である.

以上より示された.

まず，面積が2の倍数になるときを考えたとき，a，b がともに偶数なら「当たり前」である．よってこのときを排除し，後の場合分けからはずすことが必要不可欠である（もちろん，そもそもそのような場合がないこともあるので，上の解答では一例をあげた).
その上で，いくつかのピタゴラス数でシミュレートすると，どうやら a，b のうち片方が奇数で片方が4の倍数であることがわかる（各辺の公約数が存在するときを除く)．よって4で割った余りで分類することは自然な発想である．ただし n^2 を「4で割った余り」で分類すると矛盾にもちこめないことがわかる．これは剰余を考える上で「割る数」が甘かったためである．これは，たとえば整数の分類として最も単純なものに「偶数」と「奇数」の場合分けがあるが，この2種類の場合分けだけですべての整数問題の場合分けが解決しないことからもわかるであろう．よって方向修正して8で割った余りで分類した．このような試行錯誤は，必ずしもそのすべてが解答に現れてこない．最初から解答の場合分けが必ずしも思いつくわけではないことを覚えておくこと.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n は2以上の整数とする．座標平面上の x 座標，y 座標がともに0から $n-1$ までの整数であるような n^2 個の点のうちから，異なる2個の点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を無作為に選ぶ．

(1)　$x_1 \neq x_2$　かつ　$y_1 \neq y_2$ である確率を求めよ．

(2)　$x_1+y_1=x_2+y_2$ である確率を求めよ．

題意の異なる2格子点の選び方は ${}_{n^2}C_2 \cdot 2! = \dfrac{n^2(n^2-1)}{2\cdot 1}\cdot 2 = n^2(n+1)(n-1)$ 通り．

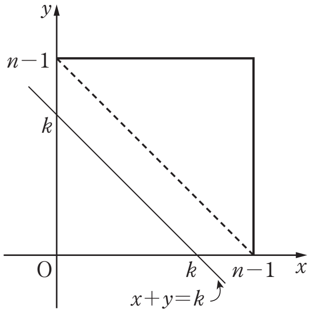
これを N とする．

(1)　0から $n-1$ までの整数から異なる2つの数を選んでそれらを x_1，x_2 とし，0から $n-1$ までの整数から異なる2つの数を選んでそれらを y_1，y_2 とした場合である．

その場合の数は　${}_nC_2\cdot 2! \times {}_nC_2 \cdot 2! = n^2(n-1)^2$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{\{n(n-1)\}^2}{N} = \dfrac{n^2(n-1)^2}{n^2(n+1)(n-1)} = \boldsymbol{\dfrac{n-1}{n+1}}$

(2)　題意の格子点のうち，直線 $x+y=k$ $(1 \leqq k \leqq n-2)$ 上にある点の個数は　$k-0+1=k+1$（個）　である．



この直線上において　$x_1+y_1=x_2+y_2=k$　となる確率は

$$\frac{{}_{k+1}C_2\cdot 2!}{N} = \frac{(k+1)k}{n^2(n+1)(n-1)}$$

図形の対称性，および直線 $x+y=n-1$ 上の n 個の点から選ぶ場合を考えて，求める確率は

$$2\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)k}{N} + \frac{{}_nC_2\cdot 2!}{N}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)k}{N} - \frac{n(n-1)}{N} = \frac{2}{N}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k) - \frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{N}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2}(n-1)n\right\}$$

$$=\frac{2}{n^2(n+1)(n-1)}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2n-1}{3n(n+1)}}$$

これ以外にも過去には「格子点」と明記されていない問題が何度も出題されている．もともと整数系の設定が多い場合の数・確率の分野であるからある意味当然ともいえる．とくに範囲が限定されている中で「和」を考える問題の時には積極的に狙っていきたい．
また，対称性についても「２重になるところ」の扱いは，最初から排除してあとから足す，またはかぶっていることを知りつつそのまま足してあとから共通部分を引く，といった解法に分かれるであろう．
数学のいずれの分野も，豊富な経験により見識が広がる分野である．解いたことがある問題ではなく，解いたことがある経験により未知なる問題に対処するのである．今後もみなさんの努力に期待する．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。